

ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ

Σ.Ε.Μ.Φ.Ε. - ΦΥΛΛΑΔΙΟ ΑΣΚΗΣΕΩΝ ΙΙ

Άσκηση 1 Ένας σπουδαστής παίρνει μέρος σε μια εξέταση που διενεργείται ως εξής: ένα κουτί περιέχει 10 ερωτήσεις, 7 από τις οποίες είναι από το κεφάλαιο 1 και 3 από το κεφάλαιο 2. Ο σπουδαστής επιλέγει τυχαία 2 από τις 10 ερωτήσεις και επιτυγχάνει στην εξέταση αν απαντήσει σωστά και στις δύο. Ο σπουδαστής έχει μελετήσει κυρίως το κεφάλαιο 1, και εκτιμάται ότι θα απαντήσει σωστά σε μια ερώτηση με πιθανότητα 80% αν αυτή είναι από το κεφάλαιο 1 και με πιθανότητα 30% αν αυτή είναι από το κεφάλαιο 2. Ποια η πιθανότητα να επιτύχει στην εξέταση; Δεδομένου ότι πέτυχε στην εξέταση, ποια η πιθανότητα να επέλεξε 2 ερωτήσεις από το κεφάλαιο 1;

Άσκηση 2 Επαναλαμβάνουμε ρίψεις ενός τίμιου ζαριού. Ποια είναι η πιθανότητα να μην εμφανιστεί 1 ή 6 στις πρώτες 5 ζαριές; Ποια είναι η πιθανότητα να εμφανιστεί 6 πριν εμφανιστεί 1 ή 2; Ποια είναι η πιθανότητα να φέρουμε 3 φορές 6 πριν φέρουμε για πρώτη φορά 1 ή 2;

Άσκηση 3 Μια αεροπορική εταιρεία έχει παρατηρήσει ότι 5% όσων έχουν αγοράσει εισιτήριο δεν εμφανίζεται για να ταξιδέψει. Τη σημερινή πτήση εκτελεί ένα αεροπλάνο με 200 θέσεις και η εταιρεία έχει πουλήσει 203 εισιτήρια. Ποια είναι η πιθανότητα να μην μπορέσει να εξυπηρετήσει ένα επιβάτη με εισιτήριο; Υποθέστε ότι αν A_i είναι το ενδεχόμενο να εμφανιστεί ο επιβάτης i , τα ενδεχόμενα A_i είναι ανεξάρτητα.

Άσκηση 4 Σε μια 8×8 σκακιάρα, πόσα είναι τα μονοπάτια ελαχίστου μήκους, με βήματα παράλληλα στους άξονες της σκακιάρας, που ξεκινούν από το κάτω αριστερά άκρο της και καταλήγουν στο πάνω δεξιά άκρο της;

Άσκηση 5 Ένας μαθηματικός, ένας αριστοκράτης κι ένας κυνηγός αποφασίζουν να μονομαχήσουν για την αγάπη μιας γυναίκας. Ο κανόνας της μονομαχίας είναι ότι οι τρεις άνδρες ρίχνουν διαδοχικά μία πιστολιά μέχρι να απομείνει ένας μόνο ζωντανός. Μετά από κλήρωση πρώτος πυροβολεί ο μαθηματικός, δεύτερος ο κυνηγός και τρίτος ο αριστοκράτης. Ο μαθηματικός έχει πιθανότητα 0,3 να πετύχει το στόχο του κάθε φορά που σκοπεύει έναν από τους αντιπάλους του, ο αριστοκράτης έχει πιθανότητα 0,5, ενώ ο κυνηγός δεν αστοχεί ποτέ. Τι πρέπει να κάνει ο μαθηματικός μας; Ποιος από τους μονομάχους θα έχει τότε τη μεγαλύτερη πιθανότητα να αναδειχθεί νικητής;



Άσκηση 6 Στο παιχνίδι A ρίχνετε 6 ζάρια και κερδίζετε αν φέρετε τουλάχιστον 1 εξάρι. Στο παιχνίδι B ρίχνετε 12 ζάρια και κερδίζετε αν φέρετε τουλάχιστον 2 εξάρια. Σε ποιο από τα δύο παιχνίδια έχετε μεγαλύτερη πιθανότητα να κερδίσετε; Σημ: το πρόβλημα είχε τεθεί στον Νεύτωνα από τον Pepys (εκδότη του Principia και παθιασμένο με τα στοιχήματα.) *Μπορείτε να γενικεύσετε για $6n$ ζάρια και τουλάχιστον n εξάρια;

Άσκηση 7 Έστω $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ μια ακολουθία από ενδεχόμενα. Ορίζουμε

$$\limsup_n A_n (= A_n \text{ i.o.}) = \bigcap_{m=1}^{\infty} \bigcup_{n=m}^{\infty} A_n \quad \text{και} \quad \liminf_n A_n = \bigcup_{m=1}^{\infty} \bigcap_{n=m}^{\infty} A_n$$

τα ενδεχόμενα να συμβούν άπειρα A_n και τελικά όλα τα A_n , αντίστοιχα. Υπολογίστε τα $\limsup_n A_n$ και $\liminf_n A_n$ στις παρακάτω περιπτώσεις.

α) $A_{2n-1} = (-n, 0]$ και $A_{2n} = [0, n)$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

β) $A_n = \{x \in \mathbb{R} : nx \in \mathbb{Z}\}$.

γ) $Y : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ και $A_n = \{\omega \in \Omega : Y(\omega) \geq (-1)^n + \frac{1}{n}\}$.

Άσκηση 8 Έστω $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ μια ακολουθία από ενδεχόμενα. Δείξτε ότι

$$\mathbb{P}[\liminf_n A_n] \leq \liminf_n \mathbb{P}[A_n] \leq \limsup_n \mathbb{P}[A_n] \leq \mathbb{P}[\limsup_n A_n]$$

Άσκηση 9 * Στην άσκηση 10 του 1ου Φυλλαδίου, υπολογίστε την πιθανότητα ο A να φέρει αυστηρά περισσότερες φορές γράμματα απ' ό,τι ο B.