ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ - Σ.Ε.Μ.Φ.Ε.

ΦΥΛΛΑΔΙΟ ΑΣΚΗΣΕΩΝ X

Άσκηση 1 Η από κοινού κατανομή των τυχαίων μεταβλητών X, Y, Z είναι κανονική σε 3 διαστάσεις με μέση τιμή $\mathbf{m} = \mathbf{0}$ και πίνακα συνδιακυμάνσεων

$$\boldsymbol{\Sigma} = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Βρείτε την δεσμευμένη κατανομή των X, Y δεδομένου ότι $Z = 0$.

Άσκηση 2 Για τις τ.μ. της προηγούμενης άσκησης βρείτε την δεσμευμένη κατανομή της Y, δεδομένου ότι $X = Z = 0$. Βρείτε την απο κοινού κατανομή των τυχαίων μεταβλητών Y και $X - Z$. Ποια είναι η δεσμευμένη κατανομή της Y δεδομένου ότι $X = Z$;

Άσκηση 3 Έστω $X_0 \sim \mathcal{N}(0, 1)$ και

$$X_n = \frac{3}{5} X_{n-1} + \frac{4}{5} W_n$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$, όπου $\{W_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ είναι μια ακολουθία από ανεξάρτητες, ισόνομες τυχαίες μεταβλητές με τυπική κανονική κατανομή και ανεξάρτητες από την X_0. Δείξτε ότι η από κοινού κατανομή των X_0, X_1, X_2, X_3 είναι κανονική σε 4 διαστάσεις. Ποιος είναι ο πίνακας συνδιακυμάνσεων; Ποια είναι η περιθώρια κατανομή των X_1, X_2, X_3; Ποια είναι η δεσμευμένη κατανομή της X_2 δεδομένου ότι $X_1 = x$ και $X_3 = y$;

Άσκηση 4 Θεωρούμε ένα μοντέλο σύμφωνα με το οποίο το ύψος Y μιας γυναίκας και το ύψος X της μητέρας της είναι τυχαίες μεταβλητές, και το ζεύγος (X, Y) ακολουθεί διδιάστατη κανονική κατανομή. Οι περιθώριες κατανομές τους είναι $X \sim \mathcal{N}(\mu_1, \sigma^2)$ και $Y \sim \mathcal{N}(\mu_2, \sigma^2)$, ενώ ο συντελεστής συσχέτισής τους είναι ρ. Έστω $W = Y - \rho X$.
α) Υπολογίστε την σ.π.π. f_W της τ.μ. W συναρτήσει των παραμέτρων $\mu_1, \mu_2, \sigma^2, \rho$ του μοντέλου.
β) Υπολογίστε την από κοινού σ.π.π. του ζεύγους (X, W).
γ) Χρησιμοποιώντας τον γραμμικό μετασχηματισμό $(X, Y) = (X, W + \rho X)$ δείξτε ότι η δεσμευμένη σ.π.π. της Y δεδομένης της X δίνεται από την $f_{Y|X}(y|x) = f_W(y - \rho x)$.
δ) Ποιο είναι το μικρότερο ύψος x που πρέπει να έχει μια γυναίκα ώστε να ξεπερνά το αναμενόμενο ύψος της κόρης της, δηλ. $\mathbb{E}\big[Y|X = x\big] < x$;

Άσκηση 5 Οι στοχαστικές διαδικασίες είναι τυχαίες συναρτήσεις, και ένας τρόπος να τις φανταστεί κανείς είναι ότι η τιμή τους κάθε χρονική στιγμή είναι μια τυχαία μεταβλητή. Η κίνηση Brown είναι μια στοχαστική διαδικασία όπου $B_t \sim \mathcal{N}(0, t)$. Αυτό δεν καθορίζει πλήρως την κίνηση Brown αφού την ίδια ιδιότητα έχει και η διαδικασία $Y_t = \sqrt{t}\chi$ όπου $\chi \sim \mathcal{N}(0, 1)$ και $t \geq 0$. Χρειάζεται να καθορίσουμε και το πώς σχετίζονται μεταξύ τους οι τιμές της διαδικασίας σε διαφορετικούς χρόνους, πώς εξελίσσεται δηλαδή η διαδικασία στο χρόνο. Ο τρόπος που αυτό συμβαίνει για την κίνηση Brown είναι ότι για κάθε $s, t \in \mathbb{R}_+$ με $s < t$ η μεταβολή της $B_t - B_s$ είναι ανεξάρτητη από το παρελθόν της, είναι δηλαδή ανεξάρτητη από τις τ.μ. B_r με $r \leq s$ με κατανομή $\mathcal{N}(0, t - s)$. Αν $r < s < t$ βρείτε την από κοινού κατανομή των B_r, B_s, B_t και την δεσμευμένη σ.π.π. της B_s δεδομένων των B_r, B_t.

Άσκηση 6 Θεωρήστε μια ακολουθία $U_1, U_2, \ldots$ από ανεξάρτητες, ισόνομες τ.μ. με ομοιόμορφη κατανομή στο [0,1]. Αν $E_n = n(1 - \max\limits_{1\leq i\leq n} U_i)$ υπολογίστε την σ.κ.π. της E_n και δείξτε ότι καθώς $n \to \infty$ η E_n συγκλίνει κατά κατανομή σε μια εκθετική τ.μ. με μέση τιμή 1.

Άσκηση 7 Αν $\{X_n\}_n$ είναι μια ακολουθία από ανεξάρτητες, ισόνομες τυχαίες μεταβλητές με μέση τιμή $\mu \in \mathbb{R}$ και πεπερασμένη διασπορά, υπολογίστε το όριο

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\big[X_1 + \cdots + X_n > n\mu\big].$$

Με τη βοήθεια του παραπάνω αποτελέσματος υπολογίστε το όριο

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=n}^{\infty} e^{-n} \frac{n^k}{k!}.$$

Άσκηση 8 Αν $X_1, X_2, \dots$ είναι μια ακολουθία από ανεξάρτητες, ισόνομες τυχαίες μεταβλητές με κατανομή $\mathcal{E}xp(1)$ και $M_n = \max_{1 \le i \le n} X_i$, δείξτε ότι

$$M_n - \log n \xrightarrow{d} Y,$$

όπου η τυχαία μεταβλητή Y έχει σ.κ.π. $G(x) = e^{-e^{-x}},\ x \in \mathbb{R}$.

Άσκηση 9 *Σ' ένα ψηφιακό κανάλι η πιθανότητα λανθασμένης λήψης ενός ψηφίου είναι p ανεξάρτητα από τα άλλα ψηφία. Αν S_N είναι το πλήθος των σφαλμάτων κατά την μετάδοση N ψηφίων
α) Υπολογίστε την αναμενόμενη τιμή και την διασπορά του S_N.
β) Βρείτε ένα άνω φράγμα για την πιθανότητα να συμβούν πάνω από δpN σφάλματα ($\delta > 1$) κατά τη μετάδοση N ψηφίων, χρησιμοποιώντας την ανισότητα Chebyshev.
γ) (Φράγματα Chernoff) Παρατηρώντας ότι για κάθε $\lambda > 0$ έχουμε $\{S_N > \delta pN\} \Leftrightarrow \left\{e^{\lambda S_N} > e^{\delta p \lambda N}\right\}$ και χρησιμοποιώντας την ανισότητα Markov βρείτε ένα ακόμα καλύτερο άνω φράγμα (που πέφτει εκθετικά με το N.)
(Υπόδειξη: Ορίζοντας τις τ.μ. X_i με τιμή 1 ή 0 ανάλογα με το αν συμβαίνει λάθος ή όχι στη λήψη του i-στού ψηφίου, έχουμε $S_N = \sum_{i=1}^{N} X_i$.)