

ΘΕΩΡΙΑ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΩΝ & ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ

Σ.Ε.Μ.Φ.Ε. ΦΥΛΛΑΔΙΟ ΑΣΚΗΣΕΩΝ Ι

Άσκηση 1 Στο παιχνίδι του μπριτζ τα 52 φύλλα της τράπουλας μοιράζονται (από 13) σε 4 παίκτες N, S, E, W . Ας συμβολίζουμε με N_k το ενδεχόμενο ο παίκτης N να πάρει τουλάχιστον k άσους, και αντίστοιχα για τους άλλους παίκτες. Τι μπορούμε να πούμε για το πλήθος των άσων που έχει ο W σε κάθENA από τα παρακάτω ενδεχόμενα.

- | | | |
|------------------------------|--------------------------------|-------------------------------------|
| α) W_1^c , | γ) $N_2 \cap S_2$, | ε) $W_2 \setminus W_3$, |
| β) $N_1 \cap S_2 \cap W_1$, | δ) $(N_2 \cup S_2) \cap E_2$, | στ) $N_1^c \cap S_1^c \cap E_1^c$. |

Άσκηση 2 Θεωρήστε το χώρο πιθανότητας $\Omega = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} : a, b, c \in \{0, 1\} \right\}$. Αν

$$\mathbb{P} \left[\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \right] = K(a + b + c)$$

όπου K είναι μια σταθερά, υπολογίστε την K και στην συνέχεια την πιθανότητα του ενδεχομένου $A = \{P \in \Omega : \text{ο } P \text{ είναι αντιστρέψιμος}\}$.

Άσκηση 3 Δύο ενδεχόμενα A, B έχουν πιθανότητα $\frac{2}{3}$ και $\frac{1}{2}$ αντίστοιχα. Ποιά είναι η μικρότερη και η μεγαλύτερη τιμή που μπορεί να πάρει η $\mathbb{P}[A \cap B]$; Δώστε παραδείγματα χώρων πιθανότητας και ενδεχομένων A, B όπου η πιθανότητα της τομής λαμβάνει τη μικρότερη και τη μεγαλύτερη δυνατή τιμή.

Άσκηση 4 Σ' ένα Τμήμα Εφαρμοσμένων Μαθηματικών οι 150 φοιτητές του πρώτου έτους πήραν τα μαθήματα Γραμμική Άλγεβρα (ΓΑ), Απειροστικός Λογισμός (ΑΛ) και Εισαγωγή στους Ηλεκτρονικούς Υπολογιστές (ΗΥ). Στις εξετάσεις 10 φοιτητές δεν πέρασαν κανένα μάθημα. 125 φοιτητές πέρασαν το μάθημα ΗΥ, 120 φοιτητές πέρασαν το μάθημα ΓΑ και 100 φοιτητές πέρασαν το μάθημα ΑΛ. 80 φοιτητές πέρασαν τόσο το ΓΑ όσο και το ΑΛ, 90 φοιτητές πέρασαν τόσο το ΑΛ όσο και το ΗΥ, και 100 φοιτητές πέρασαν τόσο το ΓΑ όσο και το ΗΥ. Πόσοι φοιτητές πέρασαν όλα τα μαθήματα;

Άσκηση 5 Ρίχνουμε ένα ζάρι τρεις φορές. Ποια είναι η πιθανότητα να πάρουμε τρία διαφορετικά αποτελέσματα;

Άσκηση 6 Έχετε τρία φαινομενικά ίδια νομίσματα. Τα δύο από αυτά είναι τίμια ενώ το τρίτο σε κάθε στρίψιμο έχει πιθανότητα $2/3$ να φέρει γράμματα. Επιλέγετε τυχαία ένα από τα τρία νομίσματα, το στρίβετε 3 φορές και φέρνετε τρεις φορές γράμματα. Ποια είναι η πιθανότητα να έχετε επιλέξει το κίβδηλο;

Άσκηση 7 Δύο κληρωτίδες, η A και η B , περιέχουν από 8 σφαιρίδια η καθεμία. Στην A υπάρχουν 5 άσπρα και 3 μαύρα, ενώ στη B , 1 άσπρο και 7 μαύρα. Επιλέγουμε τυχαία μία κληρωτίδα και από αυτή βγάζουμε δύο σφαιρίδια το ένα μετά το άλλο χωρίς επανατοποθέτηση. Αν και τα δύο σφαιρίδια ήταν μαύρα, ποια η πιθανότητα να βγύχαν από την κληρωτίδα A ; Πόσο αλλάζει η πιθανότητα, αν η επιλογή των σφαιριδίων γίνεται με επανατοποθέτηση;

Άσκηση 8 Ένα μοντέλο προτείνει ότι η πιθανότητα ένα ζευγάρι να έχει k ακριβώς παιδιά είναι $p_k = \left(\frac{11}{23}\right)^k$, για $k = 1, 2, \dots$. Ποια πιθανότητα αποδίδει το μοντέλο στο ενδεχόμενο να μην αποκτήσει παιδιά ένα ζευγάρι; Ποια είναι η πιθανότητα κατά το μοντέλο οι θυγατέρες ενός ζευγαριού να είναι ακριβώς 2;

Άσκηση 9 Τρεις παίκτες A, B, Γ παίζουν σε ένα τουρνουά ταβλιού. Αρχικά παίζουν ο A με τον B και ο Γ κάθεται. Στη συνέχεια, ο νικητής κάθε παρτίδας παίζει με τον παίκτη που καθόταν στην προηγούμενη παρτίδα, ώσπου ένας παίκτης να κερδίσει δύο διαδοχικές παρτίδες, οπότε κερδίζει και το παιχνίδι.

- α) Περιγράψτε τον χώρο των δυνατών εκβάσεων του παιχνιδιού.
- β) Υπολογίστε την πιθανότητα νίκης κάθε παίκτη αν υποθέσουμε ότι και οι τρεις είναι ισοδύναμοι.

Άσκηση 10 * Ο παίκτης A στρίβει ν φορές ένα (δίκαιο) νόμισμα και ο παίκτης B στρίβει το ίδιο νόμισμα $\nu + 1$ φορές. Ποια είναι η πιθανότητα ο B να φέρει αυστηρά περισσότερες φορές γράμματα απ' όσες ο A ;