ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ & ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

ΤΟΜΕΑΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Πιθανότητες - 26 Σεπτεμβρίου 2017

ΑΣΚΗΣΗ 1 Το τυχαίο διάνυσμα (X, Y, Z) ακολουθεί κανονική κατανομή με μέση τιμή $\mathbf{m} = \mathbf{0}$ και πίνακα συνδιακυμάνσεων

$$\mathbf{\Sigma} = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

α) Ποια είναι η περιθώρια κατανομή του ζεύγους (X, Y);

β) Υπολογίστε τη διασπορά της $X - Y$ και τη συνδιακύμανση $\mathrm{Cov}(X - Y, Z)$.

γ) Δείξτε ότι η δεσμευμένη κατανομή της Z δεδομένου ότι $X = Y$ είναι $\mathcal{N}(0, \frac{5}{3})$.

δ) Υπολογίστε την $\mathbb{E}\big[Z^n \,|\, X = Y\big]$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

ΑΣΚΗΣΗ 2 Αν X είναι μια τ.μ. με τιμές στο $\mathbb{N}_0$ και πεπερασμένη μέση τιμή $\mu > 0$, συμβολίζουμε με X_* μια τυχαία μεταβλητή με τιμές στο $\mathbb{N}_0$ και

$$\mathbb{P}\big[X_* = k\big] = \frac{k}{\mu}\mathbb{P}\big[X = k\big],\ k \in \mathbb{N}_0.$$

α) Αν $\psi(t) = \mathbb{E}\big[e^{itX}\big],\ t \in \mathbb{R}$ είναι η χαρακτηριστική συνάρτηση (χ.σ.) της τ.μ. X, δείξτε ότι η χ.σ. της X_* είναι η

$$\psi_*(t) = \frac{1}{i\mu}\psi'(t),\ t \in \mathbb{R}.$$

β) Υπολογίστε την χ.σ. μιας τυχαίας μεταβλητής X που ακολουθεί κατανομή Poisson.

γ) Αν η τ.μ. X ακολουθεί κατανομή Poisson, δείξτε ότι η X_* ακολουθεί την ίδια κατανομή όπως η $Y = X + 1$.

δ) Αν οι τ.μ. X_* και $Y = X + 1$ ακολουθούν την ίδια κατανομή, δείξτε ότι η τ.μ. X ακολουθεί κατανομή Poisson.

ΑΣΚΗΣΗ 3 Έστω X τυχαία μεταβλητή (τ.μ.) με τιμές στο $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$ και $\mathbb{P}\big[X = k\big] = \frac{1}{Z(\lambda)}\frac{\lambda^k}{(k!)^2}, \quad k \in \mathbb{N}_0$.

α) Δείξτε ότι $Z(\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{(k!)^2}$.

β) Δείξτε ότι $\mathbb{E}\big[X\big] = \dfrac{\lambda Z'(\lambda)}{Z(\lambda)}$ και $\mathbb{E}\big[X^2\big] = \lambda$.

Σ' έναν ποδοσφαιρικό αγώνα τα τερμάτα που σημειώνει κάθε ομάδα είναι ανεξάρτητες ισόνομες τ.μ. που ακολουθούν κατανομή Poisson με παράμετρο $\theta > 0$, δηλαδή $\mathbb{P}_\theta\big[N_i = k\big] = e^{-\theta}\frac{\theta^k}{k!},\ k \in \mathbb{N}_0$.

γ) Αν I είναι το ενδεχόμενο το παιχνίδι να τελειώσει ισόπαλο δείξτε ότι

$$\mathbb{P}_\theta\big[I\big] = e^{-2\theta}Z(\theta^2).$$

δ) Δείξτε ότι η πιθανότητα ισοπαλίας είναι φθίνουσα συνάρτηση του θ, δηλαδή όσο πιο επιθετικά παίζουν δύο ισοδύναμες ομάδες τόσο πιο σπάνιο είναι το ενδεχόμενο να λήξει ο αγώνας ισόπαλος.

Υπόμνηση: Αν $\Gamma(p) = \int_0^\infty t^{p-1}e^{-t}dt,\ p > 0$, έχουμε $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$ και $\Gamma(p+1) = p\Gamma(p)$ για κάθε $p > 0$.

Διάρκεια εξέτασης 2,5 ώρες

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!