Πιθανότητες- 14 Φεβρουαρίου 2016

ΑΣΚΗΣΗ 1 Η συνάρτηση κατανομής πιθανότητας (σ.κ.π.) της τ.μ. X δίνεται, όταν $x \in (0,1)$, από την $F(x) = \frac{x^4}{2}$.

α) Δείξτε ότι $\mathbb{P}\big[X > 0\big] = 1$.

β) Αν η τ.μ. $\frac{1}{X}$ ακολουθεί την ίδια κατανομή όπως η X, δείξτε ότι $F(x) = 1 - \frac{1}{2x^4}$ για $x \geq 1$.

γ) Δείξτε ότι η κατανομή της X είναι συνεχής με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας (σ.π.π.) την

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ 2x^3, & 0 < x < 1 \\ 2x^{-5}, & x \geq 1. \end{cases}$$

δ) Υπολογίστε τη μέση τιμή και τη διασπορά της X.

ε) Βρείτε την κατανομή της τ.μ. $Z = |\log X|$.

στ) Δείξτε ότι αν η θετική τ.μ. Y ακολουθεί την ίδια κατανομή όπως η $\frac{1}{Y}$, τότε $\mathbb{E}\big[Y\big] \geq 1$. Πότε ισχύει η ισότητα;

ΑΣΚΗΣΗ 2 Το τυχαίο διάνυσμα $\mathbf{W} = (X,Y,Z)^T$ ακολουθεί κανονική κατανομή στον $\mathbb{R}^3$ με μέση τιμή $\mathbf{0}$ και πίνακα συνδιακυμάνσεων

$$\mathbf{\Sigma} = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 2 \\ 4 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

α) Ποια είναι η περιθώρια κατανομή του ζεύγους (X,Z); Είναι οι X, Z ανεξάρτητες;

β) Ορίζουμε $U = X - \lambda Y$ και $V = Z - \mu Y$. Υπολογίστε τα $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ ώστε $\operatorname{Cov}\big(Y,U\big) = \operatorname{Cov}\big(Y,V\big) = 0$.

γ) Δείξτε ότι αν επιλέξουμε τα λ, μ όπως στο (β), τότε οι U, V είναι ανεξάρτητες, τυπικές, κανονικές τυχαίες μεταβλητές.

δ) Ποια είναι η από κοινού σ.π.π. της τριάδας (Y,U,V);

ε) Υπολογίστε την σ.π.π. του τυχαίου διανύσματος $\mathbf{W}$.

στ) Δείξτε ότι $f_{X,Z|Y}(x,z|y) = f_{X|Y}(x|y) f_{Z|Y}(z|y)$. Επομένως, με δεδομένη την Y, οι X και Z είναι ανεξάρτητες.

ΑΣΚΗΣΗ 3 Η τ.μ. $X : \Omega \to \mathbb{R}$ έχει σ.π.π.

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \frac{1}{1+x^2}, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Θεωρήστε γνωστό ότι η χαρακτηριστική συνάρτηση (χ.σ.) της X είναι η $\phi(t) = \mathbb{E}\big[e^{itX}\big] = e^{-|t|}$, $t \in \mathbb{R}$.

α) Αν η $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ είναι μια ακολουθία από ανεξάρτητες, ισόνομες τ.μ. με κατανομή ίδια με την X, ποια είναι η χ.σ. της τ.μ.

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k;$$

β) Δείξτε ότι η S_n ακολουθεί την ίδια κατανομή όπως η τ.μ. $Y_n = nX$.

γ) Ποια είναι η σ.π.π. της S_n;

δ) Δείξτε ότι για κάθε $x \geq 0$ έχουμε $\mathbb{P}\big[|X| \geq x\big] \geq 2x f(x)$.

ε) Δείξτε ότι $\mathbb{P}\big[\limsup\{|X_n| \geq n\}\big] = 1$.

στ) Δείξτε ότι αν για κάποιο $\omega \in \Omega$ έχουμε $S_n(\omega)/n \to \ell \in \mathbb{R}$, τότε $X_n(\omega)/n \to 0$.

ζ) Είναι σωστή ή όχι η πρόταση $\mathbb{P}\big[S_n/n \text{ συγκλίνει}\big] = 1$; Αιτιολογήστε την απάντησή σας.

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!

Διάρκεια εξέτασης 2,5 ώρες