ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ
ΧΕΙΜΕΡΙΝΟ ΕΞΑΜΗΝΟ 2015
ΦΥΛΛΑΔΙΟ ΑΣΚΗΣΕΩΝ

***Άσκηση* 1** Ένας μαθηματικός και ένας αριστοκράτης εμπλέκονται σε μια μονομαχία. Πυροβολούν εναλλάξ, με τον μαθηματικό να ξεκινά πρώτος, ώσπου ένας από τους δύο να χτυπηθεί. Αν κάθε φορά που πυροβολεί ο μαθηματικός η πιθανότητα ευστοχίας του είναι p και αντίστοιχα η πιθανότητα ευστοχίας για τον αριστοκράτη είναι q, υπολογίστε την πιθανότητα να βγει νικητής ο μαθηματικός.

***Άσκηση* 2** Ένας μαθηματικός, ένας αριστοκράτης κι ένας κυνηγός αποφασίζουν να μονομαχήσουν για την αγάπη μιας γυναίκας. Ο κανόνας της μονομαχίας είναι ότι οι τρεις άνδρες πυροβολούν διαδοχικά μέχρι να απομείνει ένας μόνο ζωντανός. Μετά από κλήρωση πρώτος πυροβολεί ο μαθηματικός, δεύτερος ο κυνηγός και τρίτος ο αριστοκράτης. Ο μαθηματικός που δεν σκαμπάζει πολύ από όπλα έχει πιθανότητα 0,3 να πετύχει το στόχο του κάθε φορά που σκοπεύει έναν από τους αντιπάλους του, ο αριστοκράτης έχει πιθανότητα 0,5, ενώ ο κυνηγός δεν αστοχεί ποτέ. Τι πρέπει να κάνει ο μαθηματικός μας; Ποιος από τους μονομάχους θα έχει τότε τη μεγαλύτερη πιθανότητα να αναδειχθεί νικητής;

***Άσκηση* 3** Ένα μοντέλο προτείνει ότι η πιθανότητα ώστε ένα ζευγάρι που ζει στην Αθήνα να αποκτήσει k ακριβώς παιδιά είναι $p_k = \left(\frac{11}{23}\right)^k$, για $k = 1, 2, \ldots$ Ποια πιθανότητα αποδίδει το μοντέλο αυτό στο ενδεχόμενο ένα ζευγάρι να μην αποκτήσει παιδιά; Σύμφωνα με το μοντέλο αυτό ποια είναι η πιθανότητα ώστε οι θυγατέρες ενός ζευγαριού να είναι ακριβώς δύο;

***Άσκηση* 4** Έστω πείραμα τύχης με δύο ισοπίθανα δυνατά αποτελέσματα, επιτυχία και αποτυχία. Το πείραμα επαναλαμβάνεται επ' άπειρον και για $n \in \mathbb{N}$ ορίζουμε το ενδεχόμενο A_n: οι πρώτες n εκτελέσεις ακολουθούνται από ακριβώς $2n$ επιτυχίες. Ποια είναι η πιθανότητα να πραγματοποιηθούν απείρως πολλά από τα A_n;

***Άσκηση* 5** Αν $\{X_n\}_n$ είναι μια ακολουθία από πραγματικές τυχαίες μεταβλητές ορισμένες σε κάποιον χώρο πιθανότητας $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, δείξτε ότι, αν

$$\mathbb{P}\big[\limsup_n \{X_n \geq y\}\big] = 1,\ \forall\ y < x \quad \text{και} \quad \mathbb{P}\big[\limsup_n \{X_n \geq y\}\big] = 0,\ \forall\ y > x,$$

τότε $\mathbb{P}\big[\limsup_n X_n = x\big] = 1$.

***Άσκηση* 6** Αν $\{X_n\}_n$ είναι μια ακολουθία από ανεξάρτητες, ισόνομες τυχαίες μεταβλητές με εκθετική κατανομή $\mathcal{E}xp(\lambda)$, δείξτε ότι

$$\mathbb{P}\big[\liminf_n X_n = 0\big] = 1 \quad \text{και} \quad \mathbb{P}\Big[\limsup_n \frac{X_n}{\log n} = \frac{1}{\lambda}\Big] = 1,$$

(Υπόδειξη: Ίσως βρείτε χρήσιμη την προηγούμενη άσκηση).

***Άσκηση* 7** Το χαρακτηριστικό X ενός προϊόντος είναι τυχαία μεταβλητή με κατανομή $\mathcal{N}(\mu = 32.7, \sigma^2 = 4)$. Ένα κομμάτι αυτού του προϊόντος θεωρείται *αποδεκτό* όταν $X > 30$.
α) Ποιο είναι το ποσοστό των αποδεκτών κομματιών στο σύνολο της παραγωγής;
β) Παίρνουμε διαδοχικά και τυχαία κομμάτια από το σύνολο της παραγωγής. Ποια είναι η πιθανότητα να χρειαστούν ακριβώς πέντε λήψεις μέχρι να συναντήσουμε το πρώτο αποδεκτό κομμάτι;
γ) Σε πέντε τυχαία επιλεγμένα κομμάτια, ποια είναι η πιθανότητα να βρίσκονται τουλάχιστον τρία αποδεκτά;

***Άσκηση* 8** Δείξτε ότι αν η συνάρτηση κατανομής πιθανότητας F μιας τυχαίας μεταβλητής X είναι γνησίως αύξουσα, τότε η τυχαία μεταβλητή $F(X)$ ακολουθεί ομοιόμορφη κατανομή στο [0,1]. Πώς θα μπορούσατε, εμπνεόμενοι από αυτή την άσκηση, να προσομοιώσετε μια τυχαία μεταβλητή με εκθετική κατανομή με τη βοήθεια μιας γεννήτριας τυχαίων αριθμών;

***Άσκηση* 9** Το μέτρο X της ταχύτητας ενός μορίου αερίου μάζας m σε απόλυτη θερμοκρασία T είναι μια τ.μ. με κατανομή Maxwell-Boltzmann. Συγκεκριμένα η σ.π.π. της δίνεται από την

$$f(x) = \begin{cases} \alpha x^2 e^{-\beta x^2} & \text{για } x > 0 \\ 0 & \text{διαφορετικά,} \end{cases}$$

όπου $\beta = \frac{m}{2KT}$ και α είναι μια σταθερά κανονικοποίησης (K είναι η σταθερά του Boltzmann.)
α) Υπολογίστε τη σταθερά α.
β) Υπολογίστε την αναμενόμενη τιμή της X.
γ) Υπολογίστε την αναμενόμενη τιμή της κινητικής ενέργειας $E = \frac{1}{2}mX^2$.

Άσκηση 10 Ποιο είναι το αναμενόμενο πλήθος φορών που πρέπει να ρίξουμε ένα ζάρι μέχρι να εμφανιστούν όλες οι όψεις του;

Άσκηση 11 Έστω πραγματική τυχαία μεταβλητή X με συνάρτηση κατανομής πιθανότητας F και συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας f. Η μέση τιμή της X είναι mu και η διασπορά της X είναι $\sigma^2 < +\infty$.
α) Αν ορίσουμε τη συνάρτηση $G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ με

$$G(u) = \mathbb{E}\big[(X-u)^2\big],\ u \in \mathbb{R},$$

δείξτε ότι

$$\min_{u\in\mathbb{R}} G(u) = G(\mu) = \sigma^2.$$

β) Αν ορίσουμε τη συνάρτηση $H : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ με

$$H(u) = \mathbb{E}\big[|X-u|\big],\ u \in \mathbb{R},$$

δείξτε ότι

$$\min_{u\in\mathbb{R}} H(u) = H(d),$$

όπου το $d \in \mathbb{R}$ είναι τέτοιο ώστε $F(d) = \mathbb{P}\big[X \le d\big] = 1/2$. (Ένα τέτοιο d ονομάζεται διάμεσος της τ.μ. X.)

Άσκηση 12 Έστω τυχαία μεταβλητή X με μέση τιμή μ, διάμεσο d και πεπερασμένη διασπορά σ^2. Δείξτε ότι

$$|\mu - d| \le \sigma.$$

Άσκηση 13 Έστω τυχαία μεταβλητή X με συνάρτηση κατανομής πιθανότητας $F(x) = e^{-e^{-x}},\ x \in \mathbb{R}$.
α) Βρείτε τη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της X.
β) Βρείτε τη διάμεσο d της X.
γ) Δείξτε ότι για κάθε $\lambda < 1$ έχουμε

$$\mathbb{E}\big[e^{\lambda X}\big] = \Gamma(1-\lambda).$$

Άσκηση 14 Ένα ζεύγος τυχαίων μεταβλητών X, Y έχει συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας f που είναι συμμετρική, δηλαδή

$$f(x,y) = f(y,x),\ \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

Υπολογίστε τις $\mathbb{P}\big[X < Y\big]$ και $\mathbb{P}\big[X > Y\big]$.

Άσκηση 15 Το (X, Y) είναι ένα τυχαίο διάνυσμα με σ.π.π.

$$f(x,y) = \begin{cases} 6x^{\alpha}y^{\alpha+1} & \text{για } (x,y) \in [0,1]\times[0,1] \\ 0 & \text{διαφορετικά.} \end{cases}$$

α. Υπολογίστε την σταθερά α.
β. Ελέγξτε αν οι τυχαίες μεταβλητές X, Y είναι ανεξάρτητες.
β. Υπολογίστε την πιθανότητα των ενδεχομένων $\{X \le 1/3\},\ \{Y > 2X\},\ \{X + Y \ge 1\}$.

Άσκηση 16 Θεωρήστε X, Y, Z τ.μ. ορισμένες στον ίδιο χώρο πιθανότητας με $\mathbb{E}\big[X^2\big], \mathbb{E}\big[Y^2\big] < \infty$, $\mathrm{Cov}(X,Y) = 1$, $Z \sim \mathcal{N}(0,1)$ και Z ανεξάρτητη από τις X, Y. Υπολογίστε την $\mathrm{Cov}(XZ^2, Y + Z)$.

Άσκηση 17 Έχετε γράψει n διαφορετικές χριστουγεννιάτικες κάρτες σε φίλους σας και n φακέλους με τις διευθύνσεις τους. Ανακατεύετε τους φακέλους και βάζετε μέσα σε καθέναν μια κάρτα στην τύχη. Θέτουμε $X_i = 0$ ή 1, ανάλογα αν η i-στή κάρτα τοποθετήθηκε στο σωστό φάκελο και Y το πλήθος των καρτών που τοποθετήθηκαν στο σωστό φάκελο.
α) Υπολογίστε την συνδιακύμανση των X_i, X_j και σχολιάστε το πρόσημό της.
β) Υπολογίστε την μέση τιμή και την διασπορά της Y.

Άσκηση 18 Ο Ορφέας και η Ευριδίκη δίνουν ραντεβού γαι τις 12:30. Οι χρόνοι άφιξης του καθενός είναι ανεξάρτητες τ.μ. με ομοιόμορφη κατανομή στο διάστημα 12:00–13:00. Βρείτε την κατανομή του χρόνου αναμονής αυτού που θα φτάσει πρώτος. Ποια είναι η σ.κ.π του χρόνου που ο Ορφέας περιμένει την Ευρυδίκη;

Άσκηση 19 Οι X, Y είναι ανεξάρτητες τ.μ. με τιμές στο $\mathbb{N}$ και σ.μ.π. $p_n = \frac{1}{\zeta(s)n^s}$ για κάποιο $s > 1$, όπου $\zeta(\cdot)$ είναι η συνάρτηση του Riemann

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}.$$

α) Δείξτε ότι αν $2 = p_1 < p_2 < \cdots$ είναι η ακολουθία των πρώτων αριθμών τότε τα ενδεχόμενα $E_i = \{p_i / X\}$ είναι ανεξάρτητα.

β) Εξηγήστε γιατί έχουμε $\bigcap\limits_i E_i^c = \{X = 1\}$ και συμπεράνετε την ταυτότητα του Euler

$$\frac{1}{\zeta(s)} = \prod_{i=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{p_i^s}\right).$$

γ) Αν οι X, Y είναι ανεξάρτητες τ.μ. με αυτήν την κατανομή, υπολογίστε την πιθανότητα οι X, Y να είναι σχετικά πρώτοι.

Άσκηση 20 Φορτίο q βρίσκεται στη θέση (X, Y, Z) όπου X, Y, Z είναι ανεξάρτητες τ.μ. με κατανομή $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$. Υπολογίστε την σ.π.π. του δυναμικού V στην αρχή των αξόνων και την $\mathbb{E}\big[V\big]$, όπου

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{\sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}}.$$

Άσκηση 21 Οι $X_1, X_2, \ldots, X_n$ είναι ανεξάρτητες ισόνομες τ.μ. με κατανομή $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$. Ορίζουμε $\bar{X} = \frac{X_1 + \cdots + X_n}{n}$. Δείξτε ότι η $\bar{X}$ είναι ανεξάρτητη από τις $X_i - \bar{X}$. Ποια είναι η δεσμευμένη σ.π.π. $f_{X_1|\bar{X}}(x \,|\, \mu)$;

Άσκηση 22 Δείξτε ότι αν το τυχαίο διάνυσμα $(X, Y) \in \mathbb{R}^2$ ακολουθεί τυπική κανονική κατανομή τότε και το διάνυσμα

$$\begin{pmatrix} X' \\ Y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$$

ομοίως ακολουθεί τυπική κανονική κατανομή. Δηλαδή η $\mathcal{N}(\mathbf{0}, \mathbb{I}_2)$ μένει αναλλοίωτη από στροφές.

Άσκηση 23 Οι X, Y είναι ανεξάρτητες τ.μ. με εκθετική κατανομή $\mathcal{E}xp(\lambda)$. Ορίζουμε $U = X \wedge Y$ και $V = |X - Y|$. Υπολογίστε με ένα διπλό ολοκλήρωμα την πιθανότητα $\mathbb{P}\big[U \le u,\ V \le v\big]$ και συμπεράνετε ότι οι U, V είναι ανεξάρτητες τ.μ. με κατανομή $\mathcal{E}xp(2\lambda)$ και $\mathcal{E}xp(\lambda)$ αντίστοιχα. Ερμηνεύστε διαισθητικά αυτό το αποτέλεσμα.

Άσκηση 24 Θεωρούμε ένα μοντέλο σύμφωνα με το οποίο το ύψος Y μιας γυναίκας και το ύψος X της μητέρας της είναι τυχαίες μεταβλητές, και το ζεύγος (X, Y) ακολουθεί διδιάστατη κανονική κατανομή. Οι περιθώριες κατανομές τους είναι $X \sim \mathcal{N}(\mu_1, \sigma^2)$ και $Y \sim \mathcal{N}(\mu_2, \sigma^2)$, ενώ ο συντελεστής συσχέτισής τους είναι ρ. Έστω $W = Y - \rho X$.

α) Εξηγήστε γιατί το ζεύγος (X, W) ακολουθεί διδιάστατη κανονική κατανομή.

β) Υπολογίστε τις συνδιακυμάνσεις $\mathrm{Cov}(X, W)$ και $\mathrm{Cov}(W, W)$.

γ) Υπολογίστε την σ.π.π. f_W της τ.μ. W συναρτήσει των παραμέτρων $\mu_1, \mu_2, \sigma^2, \rho$ του μοντέλου.

δ) Υπολογίστε την από κοινού σ.π.π. του ζεύγους (X, W).

ε) Χρησιμοποιώντας τον γραμμικό μετασχηματισμό $(X, Y) = (X, W + \rho X)$ δείξτε ότι η δεσμευμένη σ.π.π. της Y δεδομένης της X δίνεται από την $f_{Y|X}(y|x) = f_W(y - \rho x)$.

στ) Ποιο είναι το μικρότερο ύψος x που πρέπει να έχει μια γυναίκα ώστε να ξεπερνά το αναμενόμενο ύψος της κόρης της, δηλ. $\mathbb{E}\big[Y|X = x\big] < x$;

Άσκηση 25 Σ' ένα ψηφιακό κανάλι η πιθανότητα λανθασμένης λήψης ενός ψηφίου είναι p ανεξάρτητα από τα άλλα ψηφία. Αν S_N είναι το πλήθος των σφαλμάτων κατά την μετάδοση N ψηφίων

α) Υπολογίστε την αναμενόμενη τιμή και την διασπορά του S_N.

β) Βρείτε ένα άνω φράγμα για την πιθανότητα να συμβούν πάνω από $\delta p N$ σφάλματα ($\delta > 1$) κατά τη μετάδοση N ψηφίων, χρησιμοποιώντας την ανισότητα Chebyshev.

γ) (Φράγματα Chernoff) Παρατηρώντας ότι για κάθε $\lambda > 0$ έχουμε $\{S_N > \delta p N\} \Leftrightarrow \big\{e^{\lambda S_N} > e^{\delta p \lambda N}\big\}$ και χρησιμοποιώντας την ανισότητα Markov βρείτε ένα ακόμα καλύτερο άνω φράγμα (που πέφτει εκθετικά με το N.) (Υπόδειξη: Ορίζοντας τις τ.μ. X_i με τιμή 1 ή 0 ανάλογα με το αν συμβαίνει λάθος ή όχι στη λήψη του i-στού ψηφίου, έχουμε $S_N = \sum_{i=1}^{N} X_i$.)

Άσκηση 26 Η τ.μ. X ακολουθεί κατανομή $\chi^2(4)$, ενώ η δεσμευμένη κατανομή της τ.μ. Y με δεδομένη την X είναι ομοιόμορφη στο $[0, X]$, δηλαδή $f_{Y|X}(y|x) = \frac{1}{x}$ για $y \in (0, x)$, και 0 διαφορετικά.

α) Δείξτε ότι οι τ.μ. $Y, X - Y$ είναι ανεξάρτητες, ισόνομες και ακολουθούν κατανομή $\chi^2(2)$.

β) Υπολογίστε την πιθανότητα των ενδεχομένων $\{Y > 1\}$ και $\{X > 2Y\}$.

Άσκηση 27 α) Έστω X τ.μ. με τιμές στο $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$ και συνάρτηση μάζας πιθανότητας

$$p(k) = \frac{1}{Z(\lambda)} \frac{\lambda^k}{(k!)^2}, \quad k \in \mathbb{N}_0,$$

όπου $Z(\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{(k!)^2}$ για $\lambda > 0$ είναι παράγοντας κανονικοποίησης. Δείξτε ότι $\mathbb{E}\big[X\big] = \dfrac{\lambda Z'(\lambda)}{Z(\lambda)}$ και $\mathbb{E}\big[X^2\big] = \lambda$.

β) Σ' έναν ποδοσφαιρικό αγώνα τα τερμάτα που σημειώνει κάθε ομάδα είναι ανεξάρτητες ισόνομες τ.μ. που ακολουθούν κατανομή Poisson με παράμετρο $\theta > 0$, δηλαδή $\mathbb{P}\big[N_i = k\big] = e^{-\theta} \frac{\theta^k}{k!}, \ k = 0, 1, 2, \ldots$ Αν I είναι το ενδεχόμενο το παιχνίδι να τελειώσει ισόπαλο δείξτε ότι

$$\mathbb{P}\big[I\big] = e^{-2\theta} Z(\theta^2).$$

γ) Δείξτε ότι η πιθανότητα ισοπαλίας είναι φθίνουσα συνάρτηση του θ, δηλαδή όσο πιο επιθετικά παίζουν δύο ισοδύναμες ομάδες τόσο πιο σπάνιο είναι το ενδεχόμενο να λήξει ο αγώνας ισόπαλος.

Άσκηση 28 Αν η X είναι μια θετική τυχαία μεταβλητή (τ.μ.) με μέση τιμή $\mathbb{E}\big[X\big] = \mu$ και $V(X) = 1/2$ δείξτε ότι

$$\mathbb{P}\big[\mu - 1 \leq X \leq 2\mu\big] \geq \frac{1}{2}.$$

Άσκηση 29 Ας είναι X, Y ανεξάρτητες, ισόνομες τ.μ. με κατανομή $\mathcal{N}(0, 2)$. Ορίζουμε $U = \frac{X+Y}{2}, \ V = \frac{X-Y}{2}$.

α) Ποια είναι η σ.π.π. του τυχαίου διανύσματος (X, Y);

β) Υπολογίστε την σ.π.π. του τυχαίου διανύσματος (U, V). Είναι οι τ.μ. U, V ανεξάρτητες;

γ) Έστω $S \sim \mathcal{N}(0, 1)$ ανεξάρτητη από τις X, Y. Υπολογίστε την σ.π.π. του διανύσματος $(U, \sqrt{V^2 + S^2})$.

δ) Θεωρούμε δύο ακόμα ανεξάρτητες τ.μ. Z, W με κατανομή $\mathcal{N}(0, 2)$ και ανεξάρτητες από τις X, Y.

Αν $A = \begin{pmatrix} X & Z \\ W & Y \end{pmatrix}$, και $\Lambda_1 \geq \Lambda_2$ είναι οι ιδιοτιμές του συμμετρικού πίνακα $\frac{A + A^\top}{2}$ υπολογίστε την από κοινού κατανομή των Λ_1, Λ_2.

Άσκηση 30 Αν $\{X_n\}_n$ είναι μια ακολουθία από ανεξάρτητες, ισόνομες τυχαίες μεταβλητές με μέση τιμή $\mu \in \mathbb{R}$ και πεπερασμένη διασπορά, υπολογίστε το όριο

$$\lim_{n \to \infty} \mathbb{P}\big[X_1 + \cdots + X_n > n\mu\big].$$

Με τη βοήθεια του παραπάνω αποτελέσματος υπολογίστε το όριο

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{k=n}^{\infty} e^{-n} \frac{n^k}{k!}.$$

Άσκηση 31 Αν $X_1, X_2, \ldots$ είναι μια ακολουθία από ανεξάρτητες, ισόνομες τυχαίες μεταβλητές με κατανομή $\mathcal{E}xp(1)$ και $M_n = \max_{1 \leq i \leq n} X_i$, δείξτε ότι

$$M_n - \log n \xrightarrow{d} Y,$$

όπου η τυχαία μεταβλητή Y έχει σ.κ.π. $G(x) = e^{-e^{-x}}, \ x \in \mathbb{R}$.