ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΚΑΙ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ Η/Υ

ΘΕΩΡΙΑ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΩΝ & ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ

Τρίτη 12 Σεπτεμβρίου 2017

Άσκηση 1 1.000 από τους 5.000.000 φορολογούμενους θα κερδίσουν 1.000 ευρώ από τη λοταρία της εφορίας.

α) Εκτιμήστε πόσους το λιγότερο φορολογούμενους πρέπει να επιλέξουμε τυχαία ώστε με πιθανότητα τουλάχιστον 0,75 να βρούμε ανάμεσά τους έναν τουλάχιστον, ο οποίος θα κερδίσει τα 1.000 ευρώ.

β) Αν επιλέξουμε τυχαία με επανατοποθέτηση 500.000 φορολογούμενους, κατασκευάστε ένα *προσεγγιστικό* διάστημα εμπιστοσύνης για το συνολικό ποσό που θα κερδίσουν με βαθμό εμπιστοσύνης $\gamma = 0,95$.

Άσκηση 2 Η προσημασμένη απόσταση X (σε μέτρα) από ένα κεντρικό σημείο Ο μιας παραλίας όπου μπορεί να βρεθεί ένας αχινός έχει συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας (σ.π.π.) $f(x) = \frac{a}{\pi(a^2+x^2)}$, $x \in \mathbb{R}$, όπου $X > 0$, αν ο αχινός βρίσκεται βόρεια του Ο, και $X < 0$, αν ο αχινός βρίσκεται νότια του Ο. Μια μέρα βρέθηκε ένας αχινός 2m βόρεια του Ο, μια άλλη μέρα βρέθηκε ένας αχινός 1m βόρεια του Ο, ενώ μια τρίτη μέρα βρέθηκε ένας αχινός 2m νότια του Ο.

α) Είναι δυνατόν να εκτιμηθεί η παράμετρος a με τη μέθοδο των ροπών; Δικαιολογήστε την απάντησή σας και αν είναι ναι, να βρεθεί η εκτίμηση της a με τη μέθοδο αυτή.

β) Είναι δυνατόν να εκτιμηθεί η παράμετρος a με τη μέθοδο μέγιστης πιθανοφάνειας; Δικαιολογήστε την απάντησή σας και αν είναι ναι, να βρεθεί η εκτίμηση της a με τη μέθοδο αυτή.

Άσκηση 3 Οι ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές (τ.μ.) $T_1, \ldots, T_n$ ακολουθούν εκθετική κατανομή με παραμέτρους $a_1, \ldots, a_n$ αντίστοιχα.

α) Αν $L = \min\{T_1, \ldots, T_n\}$, να υπολογίσετε τη μέση τιμή $\mathbb{E}[L]$ και τη διασπορά $V(L)$ της L.

β) Αν $M = \max\{T_1, T_2\}$, να υπολογίσετε τη μέση τιμή $\mathbb{E}[M]$ και τη διασπορά $V(M)$ της M.

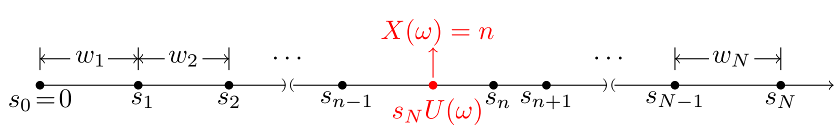
γ) Να υπολογίσετε τη δεσμευμένη μέση τιμή $\mathbb{E}[T_1 \,|\, T_1 < T_2]$.

Άσκηση 4 Δίνονται οι πραγματικοί αριθμοί $\{w_i\}_{1 \leq i \leq N}$ με $w_i \in [a, b]$ $(0 < a < b)$ για κάθε $i \in \{1, \ldots, N\}$. Παρακάτω περιγράφονται δύο αλγόριθμοι προσομοίωσης των τ.μ. X (αλγόριθμος Α) και Y (αλγόριθμος Β).

(Α) 1. Υπολογίζουμε τους αριθμούς $\{s_n\}_{0 \leq n \leq N}$ με $s_0 = 0$, $\quad s_n = \sum_{i=1}^{n} w_i, \quad n = 1, ..., N$.

2. Θεωρούμε μια τ.μ. U με ομοιόμορφη κατανομή στο [0,1] ($U \sim U[0,1]$) και ορίζουμε

$$X = n \quad \text{αν και μόνο αν} \quad s_{n-1} \leq s_N U < s_n, \qquad n = 1, ..., N.$$



(Β) 1. Έστω τυχαία δοκιμή (πείραμα) κατά την οποία θεωρούμε μια τ.μ. $U \sim U[0,1]$ και στη συνέχεια επιλέγουμε τυχαία και ανεξάρτητα από την U έναν δείκτη K από το σύνολο $\{1, ..., N\}$ (όλες οι επιλογές είναι ισοπίθανες). Αν $bU \leq w_K$ λέμε ότι η δοκιμή ήταν 'επιτυχής'. Διαφορετικά λέμε ότι η δοκιμή ήταν 'αποτυχής'.

2. Επαναλαμβάνουμε ανεξάρτητες τέτοιες δοκιμές και στην πρώτη επιτυχή δοκιμή τερματίζουμε τον αλγόριθμο, ορίζοντας $Y = K$.

α) Να προσδιορίσετε τη συνάρτηση μάζας πιθανότητας (σ.μ.π.) της τ.μ. X.

β) Να υπολογίσετε την πιθανότητα επιτυχίας σε μια δοκιμή του βήματος (Β1).

γ) Ποιος είναι ο αναμενόμενος αριθμός ανεξάρτητων δοκιμών μέχρι τον τερματισμό του αλγορίθμου (Β);

δ) Να βρεθεί η κατανομή της τ.μ. Y $\big($υπόδειξη: ίσως βρείτε χρήσιμο ότι $\mathbb{P}\big[Y = n\big] = \mathbb{P}\big[K = n \,\big|\, b\,U \leq w_K\big]$ $\big)$.

ε) Έστω $N \gg 1$. Συγκρίνετε τους απαιτούμενους υπολογιστικούς χρόνους των αλγορίθμων (Α) και (Β). Ποιον αλγόριθμο θα προτιμούσατε και γιατί;

Διάρκεια εξέτασης 2 ώρες και 30 λεπτά

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!