ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΚΑΙ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ Η/Υ

ΘΕΩΡΙΑ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΩΝ & ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ

Δευτέρα 13 Φεβρουαρίου 2017

ΟΜΑΔΑ Β

Άσκηση 1 Ένας εξυπηρετητής είναι συνδεμένος με 5 σκληρούς δίσκους, C, D, E, F και G. Αν το τροφοδοτικό του εξυπηρετητή είναι σε καλή κατάσταση, οι διάρκειες ζωής των 5 δίσκων (σε μέρες λειτουργίας) είναι ανεξάρτητες, ισόνομες τυχαίες μεταβλητές (τ.μ.) που ακολουθούν εκθετική κατανομή με παράμετρο α (θα συμβολίζουμε $\mathcal{E}(\alpha)$), όπου $\alpha = 0,001$. Αν το τροφοδοτικό είναι ελαττωματικό, οι διάρκειες ζωής των δίσκων (σε μέρες λειτουργίας) είναι ανεξάρτητες, ισόνομες τ.μ. που ακολουθούν εκθετική κατανομή $\mathcal{E}(\beta)$, με $\beta = 0,03$. Για έναν καινούργιο υπολογιστή, η πιθανότητα να έχει ελαττωματικό τροφοδοτικό είναι $p = 0,005$.

Σε όλα τα ερωτήματα *τηρήστε ακρίβεια 4 σημαντικών ψηφίων* στις αριθμητικές πράξεις.

α) Υπολογίστε την πιθανότητα ο δίσκος C του υπολογιστή να αντέξει τουλάχιστον 100 μέρες λειτουργίας.

β) Υπολογίστε την πιθανότητα μετά από 100 μέρες λειτουργίας να έχουν αντέξει ακριβώς 2 από τους 5 δίσκους.

γ) Αν 2 ακριβώς από τους 5 δίσκους του υπολογιστή άντεξαν 100 μέρες λειτουργίας, υπολογίστε την πιθανότητα το τροφοδοτικό του να είναι ελαττωματικό.

Άσκηση 2 Ο αριθμός X των χελώνων που φτάνουν κάθε μέρα σε μια παραλία είναι τ.μ. Poisson με παράμετρο λ, δηλαδή $\mathbb{P}\big[X = k\big] = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!},\ k = 0, 1, \ldots$

α) Αν $\lambda = 6$, να βρεθεί προσεγγιστικά η πιθανότητα μετά από 99 μέρες να έχουν φτάσει στην παραλία λιγότερες από 560 χελώνες.

β) Αν η παράμετρος λ είναι άγνωστη και στην παραλία έφτασαν 614 χελώνες τις τελευταίες 99 μέρες, βρείτε ένα προσεγγιστικό διάστημα εμπιστοσύνης για τη λ με βαθμό εμπιστοσύνης $\gamma = 0,90$.

γ) Αν $\lambda = 6$ και ο αριθμός Y των χελώνων που εγκαταλείπουν την παραλία ημερησίως είναι επίσης τ.μ. Poisson με παράμετρο $\theta = 5$, ποια είναι προσεγγιστικά η πιθανότητα μετά από 99 μέρες να βρίσκονται στην παραλία τουλάχιστον 70 περισσότερες χελώνες από όσες βρίσκονται σήμερα; Θεωρήστε τις X και Y ανεξάρτητες.

Άσκηση 3 Θεωρήστε $X_1, \ldots, X_n$ ανεξάρτητες, ισόνομες τ.μ. με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας (σ.π.π.) $f(x) = \frac{3x^2}{\theta^3},\ 0 \le x \le \theta$, όπου θ είναι μια θετική, άγνωστη παράμετρος.

α) Υπολογίστε την εκτιμήτρια της θ από τις $X_1, \ldots, X_n$, με τη μέθοδο των ροπών.

β) Υπολογίστε την εκτιμήτρια μέγιστης πιθανοφάνειας (ε.μ.π.) της θ από τις $X_1, \ldots, X_n$.

γ) Υπολογίστε την ε.μ.π. της διασποράς των X_i από τις $X_1, \ldots, X_n$.

Άσκηση 4 Θεωρούμε ακολουθία $X_1, X_2, \ldots$ από ανεξάρτητες, ισόνομες τ.μ. με κατανομή $\mathcal{E}(1)$.

α) Αν $\lambda > 0$, βρείτε την κατανομή της $\frac{X_i}{\lambda}$.

β) Υπολογίστε τη συνάρτηση κατανομής πιθανότητας της τ.μ. $M_n = \max\{X_1, \ldots, X_n\}$.

γ) Υπολογίστε τη σ.π.π. της $X_1 + \frac{X_2}{2}$ και δείξτε ότι ακολουθεί την ίδια κατανομή όπως η M_2.

δ) Δείξτε ότι για κάθε $n \in \mathbb{N}$ οι τυχαίες μεταβλητές M_n και $X_1 + \dfrac{X_2}{2} + \dfrac{X_3}{3} + \cdots + \dfrac{X_n}{n}$ ακολουθούν την ίδια κατανομή.

ε) Αν $L(n) = 1 + 1/2 + \cdots + 1/n$, δείξτε ότι για κάθε $\epsilon > 0$ έχουμε $\mathbb{P}\Big[\Big|\frac{M_n}{L(n)} - 1\Big| > \epsilon\Big] \longrightarrow 0$ καθώς $n \to \infty$.

Υπόμνηση: Η σ.π.π. της $\mathcal{E}(\lambda)$ είναι $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}\mathbb{1}\{x > 0\}$.

Διάρκεια εξέτασης 2 ώρες και 30 λεπτά

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!