

# ΘΕΩΡΙΑ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΩΝ & ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ

Σ.Η.Μ.Μ.Υ. - ΦΥΛΛΑΔΙΟ ΑΣΚΗΣΕΩΝ V

**Άσκηση 1** Έστω  $X$  τ.μ. με ομοιόμορφη κατανομή στο  $[0,1]$ . Το πρώτο δεκαδικό ψηφίο της  $X$  είναι επίσης μια τ.μ. Ποια είναι η κατανομή της; Ποια είναι η κατανομή του δεύτερου δεκαδικού ψηφίου της  $X$ ; του  $n$ -οστού δεκαδικού τη ψηφίου;

**Άσκηση 2** Μια τ.μ.  $X$  έχει συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας

$$f(x) = \begin{cases} 0 & , x < 1 \\ cx^{-5} & , x \geq 1. \end{cases}$$

Υπολογίστε την σταθερά  $c$  και στη συνέχεια την πιθανότητα των ενδεχομένων  $\{X \in [3, 5]\}$  και  $\{X \geq t\}$ . Ποια είναι η σ.κ.π. της  $X$ ;

**Άσκηση 3** Αν η τ.μ.  $U$  ακολουθεί την ομοιόμορφη κατανομή στο  $[0,1]$  α) υπολογίστε την σ.κ.π. της τ.μ.  $X = -\ln(U)$ . Ποια γνωστή κατανομή ακολουθεί; β) ποια είναι η πυκνότητα πιθανότητας της τ.μ.  $Y = U^2$ ; γ) της  $Z = U^{-2}$ ;

**Άσκηση 4** Αν η τ.μ.  $X$  ακολουθεί κατανομή  $\text{Exp}(\lambda)$  ποια κατανομή ακολουθεί η τ.μ.  $Y = [X]$ ; (για έναν πραγματικό αριθμό  $x$  το ακέραιο μέρος του  $[x]$  είναι ο μεγαλύτερος ακέραιος που είναι μικρότερος ή ίσος του  $x$ .)

**Άσκηση 5** α) Δείξτε ότι αν η τ.μ.  $X$  ακολουθεί κατανομή  $G(\lambda, p)$  τότε η  $Y = \lambda X$  ακολουθεί επίσης κατανομή Γάμμα, με παραμέτρους  $1, p$ .

β) Αν  $X \sim \mathcal{N}(0, 1)$  βρείτε την σ.π.π. της τ.μ.  $Y = X^2$ .

**Άσκηση 6** Αν η τ.μ.  $X$  ακολουθεί κανονική κατανομή  $\mathcal{N}(1, 4)$  ποια είναι η πιθανότητα το τριώνυμο  $p(z) = z^2 + Xz + 1$  να έχει πραγματικές ρίζες;

**Άσκηση 7** Αν η τ.μ.  $X$  ακολουθεί κανονική κατανομή  $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$  εκφράστε την  $F(x) = \mathbb{P}[X \leq x | X \geq \mu]$  συναρτήσει της σ.κ.π.  $\Phi$  της τυπικής κανονικής κατανομής. Από τους πίνακες για την  $\Phi$  ή με τη βοήθεια του υπολογιστή βρείτε (συναρτήσει των  $\mu, \sigma$ ) το μικρότερο δυνατό  $x \in \mathbb{R}$  τέτοιο ώστε  $F(x) \geq 0.99$ .

**Άσκηση 8** Αν η τ.μ.  $X$  έχει σ.π.π. την  $f(x) = \frac{2}{\pi} \frac{1}{1+x^2}$ ,  $x > 0$ , υπολογίστε α) την σ.κ.π. της  $X$ , β) την σ.κ.π. της  $Y = 1/X$  και γ) σ.π.π. της  $Y$ . Τι παρατηρείτε;

**Άσκηση 9** Ένας δέκτης λαμβάνει ένα ημιτονοειδές σήμα. Θεωρητικά το ψηφίο 0 αντιστοιχεί σε πλάτος σήματος 2, ενώ το ψηφίο 1 σε πλάτος σήματος 6. Στην πράξη το πλάτος είναι μια τ.μ. με σ.π.π.  $f_0(x) = C_0(1 - \frac{|x-2|}{2})^+$  για το ψηφίο 0 και  $f_1(x) = C_1(1 - \frac{|x-6|}{3})^+$  για το ψηφίο 1. Ο δέκτης χρησιμοποιεί ένα κατώφλι πλάτους  $x \in (3, 4)$  και ταξινομεί το σήμα ως 0 αν το πλάτος είναι μικρότερο του  $x$  και ως 1 διαφορετικά.

α) Υπολογίστε τις σταθερές  $C_0$  και  $C_1$  και σχεδιάστε σε κοινό διάγραμμα τις γραφικές παραστάσεις των  $f_0, f_1$ .

β) Βρείτε την τιμή του  $x$  που ελαχιστοποιεί την πιθανότητα λάθος ταξινόμησης 1) αν τα δύο ψηφία είναι εξίσου συχνά, 2) αν γνωρίζουμε εκ των προτέρων ότι με πιθανότητα 90% το ψηφίο είναι 0.