

ΘΕΩΡΙΑ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΩΝ & ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ

Σ.Η.Μ.Μ.Υ.- ΦΥΛΛΑΔΙΟ ΑΣΚΗΣΕΩΝ VI

Άσκηση 1 Σε μια παρτίδα πόκερ κάθε παίκτης παίρνει αρχικά 5 φύλλα από τα 52 της τράπουλας. Λέμε ότι ένας παίκτης έχει καρέ αν έχει 4 ίδια φύλλα (ένα από κάθε κατηγορία), π.χ. 4 άσους, 4 δεκάρια κ.ο.κ. Ποιος είναι ο αναμενόμενος αριθμός των παρτίδων που πρέπει να παίξει κάποιος μέχρι να του μοιραστεί ένα καρέ; Ποια είναι προσεγγιστικά η πιθανότητα να μην πάρει κανένα καρέ σε τόσες παρτίδες; να πάρει τρία καρέ σε τόσες παρτίδες;

Άσκηση 2 Η διάρκεια ζωής (σε ώρες) ενός προϊόντος είναι τ.μ. με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας

$$f(x) = \frac{1}{1200} e^{-\frac{x}{1200}}, \quad x > 0.$$

Κάθε μονάδα του προϊόντος έχει κόστος κατασκευής €5.000, πωλείται προς €7.000, και συνοδεύεται από εγγύηση για τη διάρκεια ζωής της. Συγκεκριμένα, αν αυτή είναι μικρότερη από 1000 ώρες το αντίτιμο της αγοράς επιστρέφεται στον αγοραστή, ενώ το προϊόν πωλείται προς €500 ως παλιό υλικό.

α) Υπολογίστε το αναμενόμενο κέρδος ανά μονάδα προϊόντος.

β) Ποια διάρκεια ζωής πρέπει να προβλέπει η εγγύηση ώστε το αναμενόμενο κέρδος ανά μονάδα προϊόντος να είναι τουλάχιστον €800;

Άσκηση 3 Η διάρκεια ζωής ενός ανταλλακτικού σε ώρες είναι τ.μ. X με σ.π.π.

$$f(x) = C e^{-\alpha x^{2/3}}, \quad x > 0.$$

α) Υπολογίστε την σταθερά C .

β) Υπολογίστε την αναμενόμενη διάρκεια ζωής του ανταλλακτικού.

Άσκηση 4 Έχετε ένα μικρό ζαχαροπλαστείο και έχετε καταλήξει στην παρατήρηση ότι το πλήθος των κέικ που πωλούνται κάθε μέρα ακολουθεί κατανομή Poisson με παράμετρο 8. Η παρασκευή κάθε κέικ σας κοστίζει €5 ενώ η τιμή διάθεσής του είναι €12. Αν ένα κέικ δεν πουληθεί την ημέρα παρασκευής του πετιέται. Πόσα κέικ πρέπει να φτιάχνετε κάθε μέρα ώστε να μεγιστοποιήσετε το αναμενόμενο κέρδος από την πώλησή τους; Θα χρειαστείτε πίνακες ή τη βοήθεια του υπολογιστή.

Άσκηση 5 Το μέτρο X της ταχύτητας ενός μορίου αερίου μάζας m σε απόλυτη θερμοκρασία T είναι μια τ.μ. με κατανομή Maxwell-Boltzmann. Συγκεκριμένα η σ.π.π. της δίνεται από την

$$f(x) = \begin{cases} \alpha x^2 e^{-\beta x^2} & \text{για } x > 0 \\ 0 & \text{διαφορετικά,} \end{cases}$$

όπου $\beta = \frac{m}{2KT}$ και α είναι μια σταθερά κανονικοποίησης (K είναι η σταθερά του Boltzmann.)

α) Υπολογίστε τη σταθερά α .

β) Υπολογίστε την αναμενόμενη τιμή της X .

γ) Υπολογίστε την αναμενόμενη τιμή της κινητικής ενέργειας $E = \frac{1}{2}mX^2$.

Άσκηση 6 α) Αν η X είναι μια μη αρνητική συνεχής τ.μ. αποδείξτε ότι $\mathbb{E}[X] = \int_0^\infty \mathbb{P}[X > t] dt$.

β) Αν η X είναι μια τ.μ. με τιμές στο $\{0, 1, 2, \dots\}$ αποδείξτε ότι $\mathbb{E}[X] = \sum_{k=0}^\infty \mathbb{P}[X > k] = \int_0^\infty \mathbb{P}[X > t] dt$.

Άσκηση 7 * Ποιο είναι το αναμενόμενο πλήθος φορών που πρέπει να ρίξουμε ένα ζάρι μέχρι να εμφανιστούν όλες οι όψεις του;