ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

ΣΧΟΛΗ ΠΟΛΙΤΙΚΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ

ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ - ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ

Άσκηση 1 (2.5 μονάδες)

Υποθέτουμε ότι η ένταση (μετρημένη σε ρίχτερ) ενός σεισμού είναι τυχαία μεταβλητή (τ.μ.) με συνάρτηση κατανομής πιθανότητας F, και ότι οι εντάσεις διαφορετικών δονήσεων είναι ανεξάρτητες. Δίνεται ότι $F(6) = 1 - 10^{-4}$.
α) Αν συμβούν 10.000 σεισμοί ποια είναι πιθανότητα ώστε και οι 10.000 να έχουν ένταση κάτω από 6R;
β) Αν το πλήθος των σεισμών που θα συμβούν σε μια περιοχή την επόμενη δεκαετία είναι μια τ.μ. N που ακολουθεί κατανομή Poisson με μέση τιμή $\lambda = 1000$, ποια είναι η πιθανότητα ώστε την επόμενη δεκαετία να μην σημειωθεί κανείς σεισμός πάνω από 6R; (Υπόμνηση: $e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$.)
γ) Δεδομένου ότι σε μια δεκαετία δεν σημειώθηκε κανείς σεισμός πάνω από 6R, υπολογίστε για $k = 0, 1, 2, \ldots$ την πιθανότητα να συνέβησαν ακριβώς k σεισμοί κατά τη διάρκεια της δεκαετίας.

Άσκηση 2 (2.5 μονάδες)

Η από κοινού συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας (σ.π.π.) των τυχαίων μεταβλητών X, Y είναι $f(x, y) = e^{-\alpha(x+y)}$ (για κάποιο $\alpha > 0$) αν $0 < x < y$, και 0 διαφορετικά.
α) Ποια είναι η τιμή της σταθεράς α;
β) Ποια κατανομή ακολουθεί η τ.μ. X;
γ) Ποια είναι η σ.π.π. της τ.μ. Y;
δ) Υπολογίστε την δεσμευμένη πιθανότητα $\mathbb{P}\big[Y < 2X \mid X > 1\big]$.
ε) Υπολογίστε την συνδιακύμανση $\mathrm{cov}(X, Y) = \mathbb{E}\big[XY\big] - \mathbb{E}\big[X\big]\mathbb{E}\big[Y\big]$.

Άσκηση 3 (2.5 μονάδες)

Έστω $\mathbf{X} = (X_1, \ldots, X_n)^T$ τυχαίο δείγμα από την κατανομή με συνάρτηση μάζας πιθανότητας $f(x) = \theta(1-\theta)^x$, $x = 0, 1, 2, \ldots$, όπου $\theta \in (0, 1)$ άγνωστη παράμετρος.

α) Να βρεθεί η εκτιμήτρια μέγιστης πιθανοφάνειας (Ε.Μ.Π.) της παραμέτρου θ.
β) Ορίζεται η παραπάνω Ε.Μ.Π. για όλα τα $\mathbf{X}$; Αν όχι ποια είναι η πιθανότητα να μην ορίζεται;
γ) Να βρεθεί η εκτιμήτρια μέγιστης πιθανοφάνειας, έστω $T(\mathbf{X})$, της $g(\theta) = \mathbb{E}[X_1]$. (Υπόμνηση: Αν $|\alpha| < 1$ τότε $\sum_{k=1}^{\infty} k\alpha^{k-1} = \frac{1}{(1-\alpha)^2}$.)
δ) Είναι η $T(\mathbf{X})$ αμερόληπτη εκτιμήτρια της $g(\theta)$;
ε) Να βρεθεί η εκτιμήτρια μέγιστης πιθανοφάνειας της $\mathbb{P}[X_1 > 1]$.

Άσκηση 4 (2.5 μονάδες)

Έστω ότι μας ενδιαφέρει να συγκρίνουμε το ποσοστό p_A ενός κόμματος Κ στην εκλογική περιφέρεια Α με το ποσοστό p_B του ίδιου κόμματος στην εκλογική περιφέρεια Β. Σε τυχαίο δείγμα 200 ψηφοφόρων της εκλογικής περιφέρειας Α, οι 80 είπαν ότι θα ψηφίσουν το κόμμα Κ. Σε τυχαίο δείγμα 100 ψηφοφόρων της εκλογικής περιφέρειας Β (ανεξάρτητο από το τυχαίο δείγμα της εκλογικής περιφέρειας Α), 45 είπαν ότι θα ψηφίσουν το κόμμα Κ.

α) Να κατασκευαστεί 95% διάστημα εμπιστοσύνης της διαφοράς των ποσοστών στις δύο εκλογικές περιφέρειες.
β) Έστω $p_A = 0.40$. Να υπολογιστεί προσεγγιστικά η πιθανότητα σε τυχαίο δείγμα 100 ψηφοφόρων της εκλογικής περιφέρειας Α το πολύ 50 να δηλώσουν ότι θα ψηφίσουν το κόμμα Κ.
γ) Επιπλέον των στοιχείων του ερωτήματος (β), έστω $p_B = 0.43$. Αν διαθέτουμε 100 ψηφοφόρους της εκλογικής περιφέρειας Β (διαφορετικούς από αυτούς του προηγούμενου ερωτήματος), να υπολογιστεί προσεγγιστικά η πιθανότητα ώστε η διαφορά των ποσοστών του κόμματος Κ στα δύο δείγματα να μην ξεπερνά κατά απόλυτη τιμή το 2%.

Διάρκεια εξέτασης 2 ώρες και 30 λεπτά

ΕΥΧΟΜΑΣΤΕ ΕΠΙΤΥΧΙΑ