

**ΘΕΩΡΙΑ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΩΝ & ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ**  
**Σ.Π.Μ. ΕΑΡΙΝΟ ΕΞΑΜΗΝΟ 2013**  
**ΦΥΛΛΑΔΙΟ ΑΣΚΗΣΕΩΝ ΙΙΙ**

**Άσκηση 1** Στρίβουμε ένα νόμισμα 4 φορές και συμβολίζουμε με  $X$  το μήκος της μεγαλύτερης ακολουθίας από ίδια διαδοχικά αποτελέσματα. Ποια είναι η συνάρτηση κατανομής της  $X$ ;

**Άσκηση 2** Ποιες από τις παρακάτω συναρτήσεις είναι συναρτήσεις κατανομής; α)  $F(x) = e^{-e^{-x}}$ , β)  $G(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$ , γ)  $E(x) = \frac{e^x}{1+e^x}$ , δ)  $H(x) = (1 - e^{-x})^+$

**Άσκηση 3** Η πιθανότητα νίκης μας σε μια παρτίδα ενός παιχνιδιού είναι  $p$ . Πριν από κάθε παρτίδα έχουμε δικαίωμα να στοιχηματίσουμε ένα ποσό, το οποίο διπλασιάζεται αν κερδίσουμε την παρτίδα και χάνεται αν χάσουμε την παρτίδα. Ξεκινάμε στοιχηματίζοντας 1 στην πρώτη παρτίδα και κάθε φορά που χάνουμε διπλασιάζουμε το στοιχημά μας ώσπου να κερδίσουμε μια παρτίδα. Έχουμε δει ότι με πιθανότητα 1 αυτό θα συμβεί σε πεπερασμένο πλήθος παρτίδων. Ποιο θα είναι το συνολικό μας κέρδος από την αρχή του παιχνιδιού μέχρι και την πρώτη μας νίκη; Αν η τυχαία μεταβλητή  $K$  είναι το πλήθος των παρτίδων που παίζουμε μέχρι την πρώτη μας νίκη, ποια κατανομή ακολουθεί η  $K$ ; Ας υποθέσουμε τώρα ότι έχουμε αρχική περιουσία  $2^n - 1$  οπότε δεν μπορούμε να αντέξουμε περισσότερες από  $n$  χαμένες παρτίδες. Ποια είναι η πιθανότητα να χάσουμε όλη μας την περιουσία πριν προλάβουμε να κερδίσουμε κάποια παρτίδα; Έστω  $K_n$  το πλήθος των παρτίδων που παίζουμε μέχρι είτε να σημειώσουμε μια νίκη, είτε να τελειώσει η περιουσία μας, δηλαδή  $K_n = \min\{K, n\}$ . Ποια είναι η κατανομή του κέρδους μας τη στιγμή  $K_n$ ;

**Άσκηση 4** Ένας φούρνος εξυπηρετεί ένα χωριό με 200 οικογένειες και κάθε μέρα φτιάχνει 6 κέικ. Ο φούρναρης εκτιμά ότι κάθε μέρα μια οικογένεια έχει πιθανότητα  $p = 0.02$  να ζητήσει ένα κέικ ανεξάρτητα από τις άλλες.

α) Υπολογίστε την ακριβή σ.μ.π. των κέικ που πωλούνται κάθε μέρα.

β) Πώς διαμορφώνεται η απάντηση στο 1ο ερώτημα αν χρησιμοποιήσουμε την προσέγγιση Poisson για το πλήθος των οικογενειών που θέλουν να αγοράσουν κέικ σε μια μέρα;

γ) Εκτιμήστε την πιθανότητα του ενδεχομένου να πουληθούν και τα 6 κέικ (θα χρειαστείτε πίνακες για την κατανομή Poisson ή τη βοήθεια του Η/Υ σας.)

**Άσκηση 5** Αν  $F$  είναι η συνάρτηση κατανομής της τ.μ.  $X$ , ποιά είναι η συνάρτηση κατανομής των παρακάτω τυχαίων μεταβλητών; α)  $Y = aX + b$  για  $a > 0$ , β)  $Y = aX + b$  για  $a < 0$ , γ)  $Z = X^+ = \max\{0, X\}$ , δ)  $E = e^X$ .

**Άσκηση 6** Μια διακριτή τ.μ.  $X$  παίρνει τιμές στο  $\mathbb{N}$  και έχει συνάρτηση μάζας πιθανότητας  $p_n = Cn^{-s}$  για κάποια σταθερά  $C$  και κάποιο  $s > 1$ . Ποια πρέπει να είναι η  $C$  σαν συνάρτηση του  $s$ ; Ποια είναι η πιθανότητα του ενδεχομένου η  $X$  να είναι πολλαπλάσιο του 7;

**Άσκηση 7** Μια τ.μ.  $X$  έχει συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας

$$f(x) = \begin{cases} 0 & , x < 1 \\ cx^{-5} & , x \geq 1. \end{cases}$$

Υπολογίστε την σταθερά  $c$  και στη συνέχεια την πιθανότητα των ενδεχομένων  $\{X \in [3, 5]\}$  και  $\{X \geq t\}$ .

**Άσκηση 8** Έστω  $X$  τ.μ. με ομοιόμορφη κατανομή στο  $[0,1]$ . Το πρώτο δεκαδικό ψηφίο της  $X$  είναι επίσης μια τ.μ. Ποια είναι η κατανομή της; Ποια είναι η κατανομή του δεύτερου δεκαδικού ψηφίου της  $X$ ;

**Άσκηση 9** Αν η τ.μ.  $U$  ακολουθεί την ομοιόμορφη κατανομή στο  $[0,1]$  α) ποια κατανομή ακολουθεί η τ.μ.  $X = -\ln(U)$ , β) ποια είναι η πυκνότητα πιθανότητας της τ.μ.  $Y = U^2$ ; γ) της  $Z = U^{-2}$ ;

**Άσκηση 10** Αν η τ.μ.  $X$  ακολουθεί κανονική κατανομή  $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$  εκφράστε την  $F(x) = \mathbb{P}[X \leq x | X \geq \mu]$  συναρτήσει της σ.κ.π.  $\Phi$  της τυπικής κανονικής κατανομής. Από τους πίνακες για την  $\Phi$  ή με τη βοήθεια του υπολογιστή βρείτε (συναρτήσει των  $\mu, \sigma$ ) το μικρότερο δυνατό  $x \in \mathbb{R}$  τέτοιο ώστε  $F(x) \geq 0.99$ .