ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

ΣΧΟΛΗ ΠΟΛΙΤΙΚΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ

ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ - ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ

Παρασκευή 28 Ιουνίου 2013

Άσκηση 1 (2.5 μονάδες)

Δύο κληρωτίδες, η Α και η Β, περιέχουν από 8 σφαιρίδια η καθεμία. Στην Α υπάρχουν 5 άσπρα και 3 μαύρα, ενώ στη Β, 1 άσπρο και 7 μαύρα. Επιλέγουμε τυχαία μία κληρωτίδα και από αυτή βγάζουμε δύο σφαιρίδια το ένα μετά το άλλο χωρίς επανατοποθέτηση. Αν και τα δύο σφαιρίδια ήταν μαύρα, ποια η πιθανότητα να βγήκαν από την κληρωτίδα Α; Πόσο αλλάζει η πιθανότητα, αν η επιλογή των σφαιριδίων γίνεται με επανατοποθέτηση;

Άσκηση 2 (2.5 μονάδες)

Η από κοινού σ.π.π. των τυχαίων μεταβλητών X, Y δίνεται από την

$$f(x,y) = \begin{cases} \alpha(x+y-x^2-y^2) & (x,y) \in (0,1)\times(0,1) \\ 0 & \text{διαφορετικά.} \end{cases}$$

α) Υπολογίστε την τιμή της σταθεράς α.
β) Ποια είναι η σ.π.π. της τυχαίας μεταβλητής X;
γ) Υπολογίστε την πιθανότητα $\mathbb{P}\big[X(1-X) \geq 2/9\big]$.
δ) Υπολογίστε την συνδιακύμανση των X, Y: $\operatorname{Cov}(X,Y) = \mathbb{E}\big[XY\big] - \mathbb{E}\big[X\big]\mathbb{E}\big[Y\big]$.
ε) Είναι οι X, Y ανεξάρτητες; Δικαιολογήστε την απάντησή σας.

Άσκηση 3 (2.5 μονάδες)

Η τ.μ. X ακολουθεί ομοιόμορφη κατανομή στο διάστημα $[0,\theta]$, όπου θ είναι μια άγνωστη παράμετρος.

α) Δείξτε ότι η εκτιμήτρια μέγιστης πιθανοφάνειας της θ από ένα τυχαίο δείγμα μεγέθους n της X είναι η

$$\hat{\theta}_n = \max\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}.$$

β) Δείξτε ότι η $\hat{\theta}_n$ έχει σ.π.π. f με $f(x) = n\theta^{-n}x^{n-1}$ για $x \in [0,\theta]$, και $f(x) = 0$ διαφορετικά.

γ) Υπολογίστε το μέσο τετραγωνικό σφάλμα της εκτίμησης $\epsilon_n = \mathbb{E}\big[\big(\hat{\theta}_n - \theta\big)^2\big] = \operatorname{Var}\big(\hat{\theta}_n\big) + \big(\mathbb{E}\big[\hat{\theta}_n\big] - \theta\big)^2$.

δ) Δείξτε ότι η

$$\tilde{\theta}_n = 2\frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n}$$

είναι μια αμερόληπτη εκτιμήτρια της θ.

ε) Υπολογίστε το μέσο τετραγωνικό σφάλμα της εκτίμησης $\delta_n = \mathbb{E}\big[\big(\tilde{\theta}_n - \theta\big)^2\big]$, και συμπεράνετε ότι $\epsilon_n/\delta_n \to 0$ καθώς $n \to \infty$.

Άσκηση 4 (2.5 μονάδες)

Έστω ότι σε τυχαίο δείγμα $n = 50$ πολιτών οι $x = 5$ συμφωνούν με τους χειρισμούς της κυβέρνησης σε συγκεκριμένο ζήτημα.

α) Να κατασκευαστεί 99% διάστημα εμπιστοσύνης του ποσοστού p των πολιτών που συμφωνούν με τους χειρισμούς της κυβέρνησης στο συγκεκριμένο ζήτημα.

β) Πόσο πρέπει να αυξηθεί το μέγεθος του δείγματος για να μειωθεί το εύρος του διαστήματος στο μισό;

γ) Έστω $p = 0.10$. Να υπολογιστεί προσεγγιστικά η πιθανότητα σε τυχαίο δείγμα $n = 500$ πολιτών τουλάχιστον οι 70 να συμφωνούν με τους χειρισμούς της κυβέρνησης στο συγκεκριμένο ζήτημα.

Διάρκεια εξέτασης 2 ώρες και 30 λεπτά

ΕΥΧΟΜΑΣΤΕ ΕΠΙΤΥΧΙΑ