

**ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ - ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ**  
**Σ.Π.Μ. ΕΑΡΙΝΟ ΕΞΑΜΗΝΟ 2013**  
**ΦΥΛΛΑΔΙΟ ΑΣΚΗΣΕΩΝ IV**

**Άσκηση 1** Η διάρκεια ζωής ενός ανταλλακτικού σε ώρες είναι τ.μ.  $X$  με σ.π.π.

$$f(x) = Ce^{-\alpha x^{2/3}}, \quad x > 0.$$

α) Υπολογίστε την σταθερά  $C$ .

β) Υπολογίστε την αναμενόμενη διάρκεια ζωής του ανταλλακτικού και την διασπορά της.

**Άσκηση 2** Σε μια παρτίδα πόκερ κάθε παίκτης παίρνει αρχικά 5 φύλλα από τα 52 της τράπουλας. Λέμε ότι ένας παίκτης έχει καρέ αν έχει 4 ίδια φύλλα (ένα από κάθε κατηγορία), π.χ. 4 άσους, 4 δεκάκια κ.ο.κ. Ποιος είναι ο αναμενόμενος αριθμός των παρτίδων που πρέπει να παίξει κάποιος μέχρι να του μοιραστεί ένα καρέ; Ποια είναι προσεγγιστικά η πιθανότητα να μην πάρει κανένα καρέ σε τόσες παρτίδες; να πάρει τρία καρέ σε τόσες παρτίδες;

**Άσκηση 3** Η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας μιας τ.μ.  $X$  είναι  $f(x) = Ax^{-6}$  για  $x > 2$ , και μηδέν διαφορετικά. Υπολογίστε την τιμή της σταθεράς  $A$ , και στη συνέχεια τη μέση τιμή και τη διασπορά της  $X$ . Για ποιές τιμές του  $r$  είναι η ροπή τάξης  $r$  πεπερασμένη;

**Άσκηση 4** Η συνάρτηση κατανομής μιας τ.μ.  $X$  είναι η  $F(x) = e^{-e^{-x}}$ . Ποια είναι η σ.π.π. της  $X$ ; Υπολογίστε την  $\mathbb{E}[e^{\frac{X}{2}}]$ .

**Άσκηση 5** Έστω  $X$  τ.μ με μέση τιμή  $\mu \in \mathbb{R}$ . Δείξτε ότι η  $H(c) = \mathbb{E}[(X - c)^2]$  ελαχιστοποιείται για  $c = \mu$ .

**Άσκηση 6** Η διάρκεια ζωής (σε ώρες) ενός προϊόντος είναι τ.μ. με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας

$$f(x) = \frac{1}{1200} e^{-\frac{x}{1200}}, \quad x > 0.$$

Κάθε μονάδα του προϊόντος έχει κόστος κατασκευής €3.000, πωλείται προς €7.000, και συνοδεύεται από εγγύηση για τη διάρκεια ζωής της. Συγκεκριμένα, αν αυτή είναι μικρότερη από 1000 ώρες το αντίτιμο της αγοράς επιστρέφεται στον αγοραστή, ενώ το προϊόν πωλείται προς €600 ως παλιό υλικό.

α) Υπολογίστε το αναμενόμενο κέρδος ανά μονάδα προϊόντος.

β) Ποια διάρκεια ζωής πρέπει να προβλέπει η εγγύηση ώστε το αναμενόμενο κέρδος ανά μονάδα προϊόντος να είναι τουλάχιστον €800;

**Άσκηση 7** Ένας φούρναρης διαθέτει το ψωμί που φτιάχνει προς €2/κιλό. Έχει παρατηρήσει ότι η ποσότητα του ψωμιού που πουλά κάθε μέρα (σε κιλά) σε αυτήν την τιμή μοντελοποιείται ικανοποιητικά από μια τυχαία μεταβλητή  $X$  με κανονική κατανομή  $\mathcal{N}(\mu = 250, \sigma^2 = 400)$ . Το κόστος παρασκευής που έχει είναι €0,8/κιλό, και όσο ψωμί δεν πουληθεί την ημέρα που φτιάχτηκε πετιέται. Πόσο ψωμί πρέπει να ζυμώνει κάθε πρωί ώστε να μεγιστοποιήσει το αναμενόμενο ημερήσιο κέρδος του;

**Άσκηση 8** Η διάρκεια ζωής μιας κατασκευής σε έτη είναι τ.μ. που ακολουθεί εκθετική κατανομή με παράμετρο  $\lambda$ . Εξηγήστε γιατί η  $\lambda$  είναι ένας δείκτης ποιότητας της κατασκευής (όσο μικρότερο το  $\lambda$  τόσο καλύτερη η κατασκευή.) Το κόστος της κατασκευής είναι  $C(\lambda) = 1000 + \frac{1}{1000\lambda}$ . Οι προδιαγραφές της κατασκευής επιβάλλουν ότι η διάρκεια ζωής της θα πρέπει να υπερβαίνει τα 50 έτη με πιθανότητα τουλάχιστον 0.99. Ποιο είναι το ελάχιστο κόστος που πρέπει να καταβάλουμε ώστε η κατασκευή να πληροί τις προδιαγραφές; Για αυτήν την τιμή του  $\lambda$  ποια είναι η πιθανότητα ώστε η διάρκεια ζωής της κατασκευής να είναι μικρότερη από 40 έτη; από 10 έτη; από 1 έτος; μεγαλύτερη από 100 έτη;