ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ - ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ

Σ.Π.Μ. ΕΑΡΙΝΟ ΕΞΑΜΗΝΟ 2013

ΦΥΛΛΑΔΙΟ ΑΣΚΗΣΕΩΝ Ι

Άσκηση 1 Στο παιχνίδι του μπριτζ τα 52 φύλλα της τράπουλας μοιράζονται (από 13) σε 4 παίκτες, N, S, E, W. Ας συμβολίζουμε με N_k το ενδεχόμενο ο παίκτης N να πάρει τουλάχιστον k άσους, και αντίστοιχα για τους άλλους παίκτες. Τι μπορούμε να πούμε για το πλήθος των άσων που έχει ο W σε κάθενα από τα παρακάτω ενδεχόμενα.

α) W_1^c,
β) $N_1 \cap S_2 \cap W_1$,
γ) $N_2 \cap S_2$,
δ) $(N_2 \cup S_2) \cap E_2$,
ε) $W_2 \setminus W_3$,
στ) $N_1^c \cap S_1^c \cap E_1^c$.

Άσκηση 2 Γράψτε τις 24 δυνατές διατάξεις των ψηφίων 1,2,3 και 4. Αν αποδώσουμε πιθανότητα $\frac{1}{24}$ σε καθεμία από αυτές και συμβολίσουμε με A_i το ενδεχόμενο το ψηφίο i να εμφανίζεται στη θέση i, υπολογίστε την πιθανότητα των ενδεχομένων $A_1, A_2, A_1 \cup A_2, A_1 \cap A_2$ και επαληθεύστε την ταυτότητα

$$\mathbb{P}\big[A_1 \cup A_2\big] = \mathbb{P}\big[A_1\big] + \mathbb{P}\big[A_2\big] - \mathbb{P}\big[A_1 \cap A_2\big].$$

Άσκηση 3 Δύο ενδεχόμενα A, B έχουν πιθανότητα $\frac{2}{3}$ και $\frac{1}{2}$ αντίστοιχα. Ποιά είναι η μικρότερη και η μεγαλύτερη τιμή που μπορεί να πάρει η $\mathbb{P}\big[A \cap B\big]$; Δώστε παραδείγματα χώρων πιθανότητας και ενδεχομένων A, B όπου η πιθανότητα της τομής λαμβάνει τη μικρότερη και τη μεγαλύτερη δυνατή τιμή.

Άσκηση 4 Τρεις παίκτες, Α,Β,Γ παίζουν σε ένα τουρνουά ταβλιού. Αρχικά παίζουν ο Α με τον Β και ο Γ κάθεται. Στη συνέχεια, ο νικητής κάθε παρτίδας παίζει με τον παίκτη που καθόταν στην προηγούμενη παρτίδα, ώσπου ένας παίκτης να κερδίσει δύο διαδοχικές παρτίδες, οπότε κερδίζει και το παιχνίδι.

α) Περιγράψτε τον χώρο των δυνατών εκβάσεων του παιχνιδιού.

β) Αν αποδώσουμε πιθανότητα $\frac{1}{2^k}$ σε κάθε έκβαση που το παιχνίδι διαρκεί k παρτίδες υπολογίστε την πιθανότητα νίκης κάθε παίκτη.

Άσκηση 5 Έχετε τρία νομίσματα, από τα οποία τα δύο είναι τίμια, ενώ το τρίτο έχει δύο όψεις με γράμματα. Επιλέγετε τυχαία ένα από αυτά, το στρίβετε 3 φορές και φέρνετε τρεις φορές γράμματα. Ποια είναι η πιθανότητα να έχετε επιλέξει το κίβδηλο;

Άσκηση 6 Ένα δοχείο έχει 10 κόκκινες και 5 μαύρες σφαίρες. Επιλέγουμε τυχαία μια σφαίρα, βλέπουμε το χρώμα της και την επιστρέφουμε στο δοχείο μαζί με άλλες 3 σφαίρες του ίδιου χρώματος. Στη συνέχεια επιλέγουμε ακόμη μια σφαίρα από το δοχείο.

α) Ποια είναι η πιθανότητα η δεύτερη σφαίρα να είναι κόκκινη;

β) Ποια είναι η πιθανότητα η πρώτη σφαίρα να ήταν κόκκινη αν η δεύτερη σφαίρα είναι μαύρη;

Άσκηση 7 Μια εργαστηριακή εξέταση έχει σχεδιαστεί για να ανιχνεύει την ύπαρξη ενός ιού στο αίμα. Έχει βρεθεί ότι αν κάποιος είναι φορέας του ιού η εξέταση βγαίνει θετική για τον ιό με πιθανότητα 95%. Αντίθετα, αν κάποιος δεν είναι φορέας του ιού η εξέταση βγαίνει θετική με πιθανότητα 2% (λέμε τότε ότι το αποτέλεσμα είναι *ψευδώς θετικό*.)

α) Αν η συχνότητα εμφάνισης του ιού στον πληθυσμό μιας πόλης είναι 1%, βρείτε την πιθανότητα να είναι φορέας του ιού ένα άτομο με θετικό αποτέλεσμα εξέτασης;

β) Βρείτε την ίδια πιθανότητα αν επιλέξουμε το άτομο από το νοσοκομείο της πόλης, όπου 30% από τους νοσηλευόμενους είναι φορείς του ιού.

Άσκηση 8 Ένας μαθηματικός και ένας αριστοκράτης εμπλέκονται σε μια μονομαχία. Πυροβολούν εναλλάξ, με τον μαθηματικό να ξεκινά πρώτος, ώσπου ένας από τους δύο να χτυπηθεί. Αν κάθε φορά που πυροβολεί ο μαθηματικός η πιθανότητα ευστοχίας του είναι p και αντίστοιχα η πιθανότητα ευστοχίας για τον αριστοκράτη είναι q, υπολογίστε την πιθανότητα να βγει νικητής ο μαθηματικός.