_Ε Θ Ν Ι Κ Ο   Μ Ε Τ Σ Ο Β Ι Ο   Π Ο Λ Υ Τ Ε Χ Ν Ε Ι Ο_

ΣΧΟΛΗ ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΚΑΙ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ Η/Υ

ΘΕΩΡΙΑ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΩΝ & ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ

Τετάρτη 14 Σεπτεμβρίου 2016

ΟΜΑΔΑ Α

Άσκηση 1 Ένα διαγώνισμα αποτελείται από 100 ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής, επιλεγμένες από μια τεράστια βάση δεδομένων. Κάθε ερώτηση έχει 5 πιθανές απαντήσεις. Για κάθε τέτοια ερώτηση, ο Άγγελος έχει πιθανότητα $\frac{3}{4}$ να γνωρίζει την απάντηση, οπότε και απαντά σωστά. Αν δεν γνωρίζει την απάντηση, απαντά επιλέγοντας τυχαία μία από τις πιθανές απαντήσεις.

α) Ποια είναι η πιθανότητα ο Άγγελος να απαντήσει σωστά στην πρώτη ερώτηση;
β) Με δεδομένο ότι απάντησε σωστά στην πρώτη ερώτηση, ποια είναι η πιθανότητα να γνώριζε την απάντηση;
γ) Υπολογίστε προσεγγιστικά την πιθανότητα ο Άγγελος να απαντήσει σωστά σε 78 τουλάχιστον ερωτήσεις.
δ) Η Βαζουμίτα έχει για κάθε ερώτηση πιθανότητα $0,98$ να γνωρίζει τη σωστή απάντηση. Υπολογίστε προσεγγιστικά την πιθανότητα να κάνει το πολύ ένα λάθος σε όλο το διαγώνισμα.

Άσκηση 2 Μια εταιρεία θέλει να ελέγξει την αποτελεσματικότητα της διαφημιστικής της καμπάνιας. Για το σκοπό αυτό κατέγραψε τις πωλήσεις της σε 8 διαφορετικά καταστήματα την εβδομάδα πριν και την εβδομάδα μετά την προβολή μιας διαφήμισης. Τα αποτελέσματα φαίνονται στον παρακάτω πίνακα.

Κατάστημα	1	2	3	4	5	6	7	8
Πριν	124	94	87	132	109	115	103	116
Μετά	135	95	96	129	117	120	110	118

Υποθέτουμε ότι το ζεύγος των εβδομαδιαίων αριθμών πωλήσεων (S_b, S_a) πριν και μετά από την προβολή της διαφήμισης ακολουθεί περίπου κανονική κατανομή με $\mathbb{E}[S_b] = \mu_1$ και $\mathbb{E}[S_a] = \mu_2$.
α) Κατασκευάστε διάστημα εμπιστοσύνης (δ.ε.) για την μ_1 με βαθμό εμπιστοσύνης (β.ε.) $\gamma_1 = 0,95$.
β) Κατασκευάστε δ.ε. για τη διαφορά $\mu_2 - \mu_1$ με β.ε. $\gamma_2 = 0,9$.

Άσκηση 3 Το ζεύγος τυχαίων μεταβλητών (τ.μ.) (X, Y) έχει από κοινού συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας (σ.π.π.) που δίνεται από την

$$f(x,y) = \begin{cases} \alpha x(1-x) + 2y(1-y) & \text{αν } 0 \le x, y \le 1 \\ 0 & \text{διαφορετικά,} \end{cases}$$

α) Δείξτε ότι $\alpha = 4$.
β) Ποια είναι η περιθώρια σ.π.π. της τ.μ. X;
γ) Δείξτε ότι $\mathrm{Cov}(X,Y) = 0$. Είναι οι X, Y ανεξάρτητες;
δ) Υπολογίστε τη δεσμευμένη σ.π.π. της X δεδομένου ότι $Y = \frac{1}{2}$ καθώς και τη δεσμευμένη μέση τιμή $\mathbb{E}\big[X \,\big|\, Y = \frac{1}{2}\big]$.

Άσκηση 4 Μια δέσμη φωτονίων προσπίπτει σ' έναν ιδανικό ανιχνευτή φωτονίων. Αν η δέσμη έχει ένταση $\lambda > 0$, οι χρόνοι ανάμεσα σε διαδοχικές αφίξεις φωτονίων στον ανιχνευτή είναι ανεξάρτητες, ισόνομες τ.μ. με κατανομή $\mathcal{E}xp(\lambda)$. Ο ανιχνευτής παράγει ένα σήμα με την άφιξη του n-στού φωτονίου. Θέλουμε να εκτιμήσουμε την άγνωστη ένταση λ της δέσμης από τον χρόνο T_n της άφιξης του n-στού φωτονίου και μόνο.

α) Δείξτε ότι η σ.π.π. της τ.μ. T_n είναι η $f(x) = \frac{\lambda^n}{(n-1)!} x^{n-1} e^{-\lambda x},\ x > 0$.
β) Δείξτε ότι η εκτιμήτρια μέγιστης πιθανοφάνειας της έντασης λ από την T_n είναι η $\hat{\lambda}_n = n{T_n}^{-1}$.
γ) Ποια είναι η σ.π.π. της τ.μ. $\hat{\lambda}_n$;
δ) Υπολογίστε τη ροπή $\mathbb{E}\big[\hat{\lambda}_n^{\alpha}\big]$ για κάθε $\alpha < n$.
ε) Βρείτε μια όσο το δυνατόν μικρότερη τιμή του $n \in \mathbb{N}$ ώστε να εξασφαλίσετε ότι η πιθανότητα του ενδεχομένου 'το σφάλμα της μέτρησης είναι πάνω από 5%' είναι μικρότερη από 10^{-5}, δηλαδή $\mathbb{P}\big[\frac{|\hat{\lambda}_n - \lambda\,|}{\lambda} > 0.05\big] < 10^{-5}$.

Υπόμνηση: $\mathcal{E}xp(\theta) = G(\theta, 1)$, όπου η σ.π.π. της $G(\theta, p)$ είναι $f(x) = \frac{\theta^p}{\Gamma(p)} x^{p-1} e^{-\theta x},\ x > 0$ και $\Gamma(n) = (n-1)!$ για $n \in \mathbb{N}$.

Διάρκεια εξέτασης 2 ώρες και 30 λεπτά

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!