



ΘΕΩΡΙΑ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΩΝ & ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ

Παρασκευή 12 Φεβρουαρίου 2016

ΟΜΑΔΑ Α

Άσκηση 1 (25 μονάδες) Το 80% των πελατών ενός κυλικείου είναι φοιτητές και το 20% καθηγητές. Ο χρόνος παραμονής (σε λεπτά) στο κυλικείο ενός φοιτητή είναι τυχαία μεταβλητή (τ.μ.) με κατανομή $\mathcal{N}(\mu = 30, \sigma^2 = 36)$ ενώ ο χρόνος παραμονής ενός καθηγητή είναι τ.μ. με κατανομή $\mathcal{N}(\mu = 23, \sigma^2 = 25)$.

α) Υπολογίστε την πιθανότητα ένας τυχαία επιλεγμένος πελάτης του κυλικείου να παραμείνει στο κυλικείο για τουλάχιστον 30 λεπτά.

β) Αν κάποιος πελάτης παρέμεινε για τουλάχιστον 30 λεπτά, ποια είναι η πιθανότητα να είναι καθηγητής;

γ) Ανάμεσα σε 200 τυχαία επιλεγμένους πελάτες του κυλικείου ποια είναι προσεγγιστικά η πιθανότητα τουλάχιστον 80 από αυτούς να παρέμειναν στο κυλικείο για τουλάχιστον 30 λεπτά;

Άσκηση 2 (20 μονάδες) Ένας κατασκευαστής θέλει να ελέγξει τις προδιαγραφές της παραγωγής ηλεκτρικών αντιστάσεων. Για το σκοπό αυτό μέτρησε την τιμή 25 αντιστάσεων και βρήκε ότι

$$\sum_{i=1}^{25} R_i = 2.475 \, \Omega, \quad \sum_{i=1}^{25} R_i^2 = 245.121 \, \Omega^2.$$

Υποθέτοντας ότι η τιμή κάθε αντίστασης είναι τ.μ. με κατανομή $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, όπου $\mu, \sigma > 0$ είναι άγνωστες παράμετροι

α) Κατασκευάστε ένα διάστημα εμπιστοσύνης (δ.ε.) για τη μ με βαθμό εμπιστοσύνης (β.ε.) $\gamma = 0,95$.

β) Κατασκευάστε ένα δ.ε. για τη σ με β.ε. $\gamma = 0,90$.

Άσκηση 3 (30 μονάδες) Ο χρόνος εξυπηρέτησης (σε λεπτά) σε καθένα από τα δύο σημεία εξυπηρέτησης ενός κέντρου είναι τ.μ. με εκθετική κατανομή $\text{Exp}(\theta)$. Έχετε ένα τυχαίο δείγμα χρόνων εξυπηρέτησης $\{10, 8, 14, 4, 2, 10\}$.

α) Βρείτε την εκτίμηση της παραμέτρου θ με βάση τη μέθοδο μέγιστης πιθανοφάνειας.

β) Βρείτε την εκτίμηση του μέσου χρόνου εξυπηρέτησης $\alpha(\theta)$ με βάση τη μέθοδο μέγιστης πιθανοφάνειας.

γ) Αν T_1 είναι η εκτιμήτρια μέγιστης πιθανοφάνειας (Ε.Μ.Π.) της θ , εξετάστε αν η T_1 είναι αμερόληπτη.

δ) Αν T_2 είναι η Ε.Μ.Π. του μέσου χρόνου εξυπηρέτησης, εξετάστε αν η T_2 είναι αμερόληπτη.

ε) Τρία πρόσωπα Α, Β, Γ περιμένουν να ανοίξει το κέντρο με τον Γ τελευταίο. Η εξυπηρέτηση των Α, Β ξεκινά ταυτόχρονα μόλις ανοίγει το κέντρο. Ποια είναι η πιθανότητα ο Β να φύγει τελευταίος από τους τρεις;

Άσκηση 4 (25 μονάδες) Μια στήλη του παιχνιδιού τζόκερ αποτελείται από 5 αριθμούς από το σύνολο $\{1, 2, \dots, 45\}$ και έναν ακόμη αριθμό (το τζόκερ) από το σύνολο $\{1, 2, \dots, 20\}$. Καθένας που θέλει να συμμετάσχει στο παιχνίδι επιλέγει τυχαία μία ακριβώς από τις δυνατές στήλες. Στη συνέχεια επιλέγεται τυχαία (με κλήρωση) μία στήλη και νικητές αναδεικνύονται οι παίχτες που την έχουν επιλέξει. Οι νικητές, αν υπάρχουν, μοιράζονται ισόποσα ένα βραβείο.

α) Πόσες διαφορετικές στήλες υπάρχουν; Ποια είναι η πιθανότητα νίκης ενός παίκτη;

β) Αν N είναι το πλήθος των στηλών σε μια κλήρωση, ποια κατανομή ακολουθεί το πλήθος W των νικητών;

γ) Με δεδομένο ότι $W = k$, ποια είναι η πιθανότητα νίκης ενός παίκτη;

δ) Σε κάποια κλήρωση συμπληρώθηκαν $N = 22.169.174$ στήλες. Ποια ήταν προσεγγιστικά η πιθανότητα να μην υπάρξει νικητής; Ποια ήταν προσεγγιστικά η πιθανότητα να βρεθούν τουλάχιστον τρεις νικητές;

ε) Στην παραπάνω κλήρωση το χρηματικό βραβείο ήταν $A = 12.400.000$. Ποιο ήταν προσεγγιστικά το αναμενόμενο κέρδος ενός παίκτη;

Υπόμνηση: $\text{Exp}(\theta) = G(\theta, 1)$, όπου η σ.π.π. της $G(\alpha, p)$ είναι $f(x) = \frac{\alpha^p}{\Gamma(p)} x^{p-1} e^{-\alpha x}$, $x > 0$.

Διάρκεια εξέτασης 2 ώρες και 30 λεπτά

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!