ΘΕΩΡΙΑ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΩΝ & ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ

Σ.Η.Μ.Μ.Υ.- ΦΥΛΛΑΔΙΟ ΑΣΚΗΣΕΩΝ IX

Άσκηση 1 Αν οι X, Y είναι ανεξάρτητες, ισόνομες τ.μ. με πεπερασμένη διασπορά, υπολογίστε την συνδιακύμανση των τ.μ. $U = \alpha X + \beta Y$ και $V = \beta X - \alpha Y$ για $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Άσκηση 2 Θεωρήστε X, Y, Z τ.μ. ορισμένες στον ίδιο χώρο πιθανότητας με $\mathbb{E}[X^2], \mathbb{E}[Y^2] < \infty$, $\mathrm{Cov}(X, Y) = 1$, $Z \sim \mathcal{N}(0, 1)$ και Z ανεξάρτητη από τις X, Y. Υπολογίστε την $\mathrm{Cov}(XZ^2, Y + Z)$.

Άσκηση 3 Θεωρούμε τις τ.μ. X, Y με διασπορά $V(X) = V(Y) = 1$. Η διασπορά του αθροίσματός τους είναι $V(X + Y) = 3$. Μπορεί οι X, Y να είναι ανεξάρτητες; Αν οι X και $X - \alpha Y$ είναι ανεξάρτητες τι μπορούμε να συμπεράνουμε για την σταθερά α;

Άσκηση 4 Έχετε γράψει n διαφορετικές χριστουγεννιάτικες κάρτες σε φίλους σας και n φακέλους με τις διευθύνσεις τους. Ανακατεύετε τους φακέλους και βάζετε μέσα σε καθέναν μια κάρτα στην τύχη. Θέτουμε $X_i = 0$ ή 1, ανάλογα αν η i-στή κάρτα τοποθετήθηκε στο σωστό φάκελο και Y το πλήθος των καρτών που τοποθετήθηκαν στο σωστό φάκελο.

α) Υπολογίστε την συνδιακύμανση των X_i, X_j και σχολιάστε το πρόσημό της.

β) Υπολογίστε την μέση τιμή και την διασπορά της Y.

Άσκηση 5 Ο Ορφέας και η Ευριδίκη δίνουν ραντεβού γαι τις 12:30. Οι χρόνοι άφιξης του καθενός είναι ανεξάρτητες τ.μ. με ομοιόμορφη κατανομή στο διάστημα 12:00–13:00. Βρείτε την κατανομή του χρόνου αναμονής αυτού που θα φτάσει πρώτος. Ποια είναι η σ.κ.π του χρόνου που ο Ορφέας περιμένει την Ευρυδίκη;

Άσκηση 6 Έστω U τ.μ. με ομοιόμορφη κατανομή στο [0,1]. Αν $X_i \in \{0, 1, \ldots, 9\}$ είναι το i-στό δεκαδικό ψηφίο της U δείξτε ότι οι X_i είναι ανεξάρτητες τ.μ.

Άσκηση 7 *Οι X, Y είναι ανεξάρτητες τ.μ. με τιμές στο $\mathbb{N}$ και σ.μ.π. $p_n = \frac{1}{\zeta(s) n^s}$ για κάποιο $s > 1$, όπου $\zeta(\cdot)$ είναι η συνάρτηση του Riemann

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}.$$

α) Δείξτε ότι αν $2 = p_1 < p_2 < \cdots$ είναι η ακολουθία των πρώτων αριθμών τότε τα ενδεχόμενα $E_i = \{p_i / X\}$ είναι ανεξάρτητα.

β) Εξηγήστε γιατί έχουμε $\bigcap_i E_i^c = \{X = 1\}$ και συμπεράνετε την ταυτότητα του Euler

$$\frac{1}{\zeta(s)} = \prod_{i=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{p_i^s}\right).$$

γ) Αν οι X, Y είναι ανεξάρτητες τ.μ. με αυτήν την κατανομή, υπολογίστε την πιθανότητα οι X, Y να είναι σχετικά πρώτοι.