



ΘΕΩΡΙΑ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΩΝ & ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ

Εξεταστική Σεπτεμβρίου 2015

**Άσκηση 1** Έχουμε ένα δεκάλεπτο και ένα εικοσάλεπτο. Σε κάθε στρίψιμο, το δεκάλεπτο έχει πιθανότητα  $p$  να φέρει κεφαλή και  $1 - p$  να φέρει γράμματα, ενώ το εικοσάλεπτο έχει πιθανότητα  $q$  να φέρει κεφαλή και  $1 - q$  να φέρει γράμματα, ανεξάρτητα το ένα από το άλλο.

- Στρίβουμε ταυτόχρονα τα δύο κέρματα. Δεδομένου ότι έφεραν διαφορετικά αποτελέσματα, ποια είναι η πιθανότητα το δεκάλεπτο να έφερε κεφαλή;
- Επαναλαμβάνουμε το στρίψιμο των δύο κερμάτων μέχρι να φέρουν διαφορετικά αποτελέσματα και ορίζουμε  $M$  να είναι η προσπάθεια που αυτό συνέβη για πρώτη φορά. Ποια είναι η κατανομή της τ.μ.  $M$ ;
- Υπολογίστε τις αναμενόμενες τιμές  $\mathbb{E}[M]$  και  $\mathbb{E}[M^2]$ .

**Άσκηση 2** Δύο δέσμες σωματιδίων προσπίπτουν σε μία συσκευή. Αν  $X_i$  και  $Y_i$  είναι αντίστοιχα ο αριθμός των σωματιδίων της μιας και της άλλης δέσμης που φτάνουν στην συσκευή κατά την διάρκεια του  $i$ -στού δευτερολέπτου από την έναρξη του πειράματος, οι  $\{X_i\}_{i \in \mathbb{N}}$  και  $\{Y_i\}_{i \in \mathbb{N}}$  είναι ανεξάρτητες ισόνομες τυχαίες μεταβλητές με κατανομή Poisson( $\lambda$ ). Η συσκευή είναι κατασκευασμένη ώστε να ανιχνεύει την διαφορά ανάμεσα στα σωματίδια που έχουν φτάσει από κάθε δέσμη. Η ένδειξή της ανανεώνεται κάθε sec, και  $n$  sec μετά την έναρξη του πειράματος είναι

$$S_n = \sum_{i=1}^n X_i - \sum_{i=1}^n Y_i.$$

- Δείξτε ότι, καθώς  $n \rightarrow \infty$ , η κατανομή της τ.μ.  $\frac{S_n}{\sqrt{2n\lambda}}$  προσεγγίζει την τυπική κανονική.
- Κατασκευάστε ένα προσεγγιστικό διάστημα εμπιστοσύνης της μορφής  $[\lambda_0, +\infty)$  για την άγνωστη παράμετρο  $\lambda$  με βαθμό εμπιστοσύνης 0,95, αν είναι γνωστό ότι ένα λεπτό μετά την έναρξη του πειράματος η ένδειξη της συσκευής είναι 60.
- Κατασκευάστε ένα προσεγγιστικό διάστημα εμπιστοσύνης της μορφής  $[0, \lambda_0)$  για την άγνωστη παράμετρο  $\lambda$  με βαθμό εμπιστοσύνης 0,95, αν είναι γνωστό ότι ένα λεπτό μετά την έναρξη του πειράματος η ένδειξη της συσκευής είναι 60.

**Άσκηση 3** Η τ.μ.  $X$  ακολουθεί ομοιόμορφη κατανομή στο διάστημα  $[\theta, 2\theta]$ , όπου  $\theta > 0$  είναι μια άγνωστη παράμετρος.

- Ποια είναι η συνάρτηση κατανομής πιθανότητας (σ.κ.π.)  $F_X$  της τ.μ.  $X$ ;
- Αν  $\{X_i\}_{i \in \mathbb{N}}$  είναι ανεξάρτητες ισόνομες τ.μ. με σ.κ.π.  $F_X$ , και  $Y_n = \max_{1 \leq i \leq n} X_i$ , βρείτε την σ.κ.π.  $G$  της  $Y_n$ .
- Υπολογίστε την  $\mathbb{E}[Y_n]$ .
- Δώστε μια εκτίμηση για την άγνωστη παράμετρο  $\theta$ , αν σε ένα τυχαίο δείγμα  $\{x_1, \dots, x_{19}\}$  της  $X$ , η μεγαλύτερη παρατήρηση είναι  $4/13$ .

**Άσκηση 4** Οι τ.μ.  $X, Y$  ακολουθούν διδιάστατη κανονική κατανομή. Οι μέσες τιμές τους είναι  $\mu_X$  και  $\mu_Y$  αντίστοιχα, ενώ έχουν την ίδια διασπορά  $\sigma^2$ . Ο μεταξύ τους συντελεστής γραμμικής συσχέτισης είναι  $\rho$ .

- Ποιος είναι ο πίνακας διασποράς της από κοινού κατανομής των  $(X, Y)$ ;
- Ποιος είναι ο πίνακας διασποράς της από κοινού κατανομής των  $(X, W)$ , όπου  $W = Y - \rho X$ .
- Υπολογίστε την μέση τιμή και την διασπορά της  $W$ , και γράψτε την σ.π.π.  $f_W$  της  $W$ .
- Δείξτε ότι η δεσμευμένη σ.π.π. της  $Y$  δεδομένης της  $X$  είναι η  $f_{Y|X}(y|x) = f_W(y - \rho x)$ .
- Για ποιές του  $x \in \mathbb{R}$  έχουμε ότι  $\mathbb{E}[Y|X = x] \leq x$ ;

Διάρκεια εξέτασης 2 ώρες και 30 λεπτά

**ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!**