



ΘΕΩΡΙΑ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΩΝ & ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ

Εξεταστική Φεβρουαρίου 2015

ΟΜΑΔΑ Α

**Άσκηση 1** Μια εταιρεία μεταφοράς έχει παρατηρήσει ότι το βάρος  $X$  (σε γραμμάρια) του περιεχομένου ενός φακέλου Α5 είναι μια τυχαία μεταβλητή (τ.μ.) με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας (σ.π.π.)

$$f(x) = \begin{cases} Ax(100 - x)^2 & \text{αν } 0 < x < 100 \\ 0 & \text{διαφορετικά.} \end{cases}$$

- Υπολογίστε την τιμή της σταθεράς  $A$ .
- Υπολογίστε την αναμενόμενη τιμή και την διασπορά του βάρους ενός τέτοιου φακέλου.
- Υπολογίστε προσεγγιστικά την πιθανότητα 400 τέτοιοι φάκελοι να ζυγίζουν συνολικά λιγότερο από 15 κιλά.
- Αν δώδεκα διανομείς μεταφέρουν 400 φακέλους ο καθένας, ποια είναι η πιθανότητα ώστε τουλάχιστον δύο από αυτούς να μεταφέρουν βάρος μικρότερο από 15 κιλά.

**Άσκηση 2** Το τυχαίο διάνυσμα  $(X, Y)$  έχει από κοινού συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας

$$f_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} e^{-\frac{x^2}{2}} & \text{αν } 0 < y < x \\ 0 & \text{διαφορετικά.} \end{cases}$$

- Δείξτε ότι η περιθώρια σ.π.π. της τ.μ.  $X$  είναι η  $f_X(x) = xe^{-\frac{x^2}{2}}$  για  $x > 0$  και 0 διαφορετικά.
- Ποια κατανομή ακολουθεί η τ.μ.  $Z = X^2$ ;
- Δείξτε ότι η τ.μ.  $U = Y/X$  είναι ανεξάρτητη της  $X$  και ακολουθεί ομοιόμορφη κατανομή στο  $(0,1)$ .

**Άσκηση 3** Θεωρήστε ένα τυχαίο δείγμα  $X_1, \dots, X_n$  από μια τ.μ. με ομοιόμορφη κατανομή στο διάστημα  $(0, \theta)$  όπου  $\theta$  είναι άγνωστη θετική παράμετρος.

- Με βάση το παραπάνω δείγμα βρείτε την εκτιμήτρια μέγιστης πιθανοφάνειας (ΕΜΠ)  $\hat{\theta}_n$  της παραμέτρου  $\theta$ .
- Ποια είναι η συνάρτηση κατανομής πιθανότητας της τ.μ.  $\hat{\theta}_n$ ;
- Αν  $\delta > 1$  υπολογίστε την πιθανότητα  $\mathbb{P}[\hat{\theta}_n < \theta < \delta \hat{\theta}_n]$  και βρείτε ένα διάστημα εμπιστοσύνης για την  $\theta$  με βαθμό εμπιστοσύνης 0,99.

**Άσκηση 4** Θέλετε να εκτιμήσετε το ποσοστό των ανθρώπων που κάνουν ειλικρινή φορολογική δήλωση. Στην περυσινή σας απόπειρα, στην ερώτησή "κάνατε ειλικρινή φορολογική δήλωση;" όλοι απάντησαν ΝΑΙ. Υποπτεύεστε ότι μπορεί κάποιος να απάντησαν ψέματα, για αυτό φέτος αποφασίσατε να ακολουθήσετε μια διαφορετική στρατηγική. Θα δίνετε στους ερωτώμενους ένα ζάρι το οποίο θα ρίχνουν κρυφά από εσάς. Αν φέρουν 1 ή 6 θα απαντούν στην ερώτησή σας ειλικρινά, ενώ αν φέρουν 2,3,4 ή 5 θα απαντούν ψέματα. Σκέφτεστε ότι έτσι κανείς δεν θα φοβάται να απαντήσει ΟΧΙ, αφού αυτό μπορεί να συμβεί επειδή έκανε μεν ειλικρινή δήλωση, αλλά έφερε 2,3,4 ή 5, κάτι που σεις δεν μπορείτε να ξέρετε.

- Υπολογίστε την πιθανότητα  $q$  να απαντήσει κάποιος στην ερώτησή σας ΝΑΙ ακολουθώντας την παραπάνω διαδικασία, σαν συνάρτηση του ποσοστού  $p$  των ανθρώπων που έκαναν ειλικρινή δήλωση.
- Υπολογίστε την πιθανότητα να έκανε ειλικρινή δήλωση κάποιος που έχει απαντήσει στην ερώτησή σας ΝΑΙ ακολουθώντας την παραπάνω διαδικασία.
- Υπολογίστε την ΕΜΠ  $\hat{q}$  της παραμέτρου  $q$  αν ρωτήσατε  $N$  άτομα και λάβετε  $n$  απαντήσεις ΝΑΙ.
- Αν  $N = 2400$  και  $n = 960$  άτομα απάντησαν ΝΑΙ στην ερώτησή σας ακολουθώντας την παραπάνω διαδικασία, εκτιμήστε την παράμετρο  $p$  με την μέθοδο της μέγιστης πιθανοφάνειας.
- Για  $N, n$  όπως στο ερώτημα (δ), κατασκευάστε ένα προσεγγιστικό 0,90-διάστημα εμπιστοσύνης για την άγνωστη παράμετρο  $p$ .

Διάρκεια εξέτασης 2 ώρες και 30 λεπτά

**ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!**