

**ΘΕΩΡΙΑ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΩΝ & ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ**  
**Σ.Η.Μ.Μ.Υ.-ΦΥΛΛΑΔΙΟ ΑΣΚΗΣΕΩΝ VIII**

**Άσκηση 1** Οι  $X, Y$  είναι τυχαίες μεταβλητές με τιμές στο  $\{-1, 1\}$  για τις οποίες έχουμε

$$\mathbb{P}[X = 1] = 1/4, \mathbb{P}[Y = 1|X = 1] = 2/3, \text{ και } \mathbb{P}[Y = 1|X = -1] = 1/3.$$

Ποια είναι η πιθανότητα το τριώνυμο  $P(z) = z^2 + Xz + Y$  να έχει πραγματικές ρίζες;

**Άσκηση 2** Το  $(X, Y)$  είναι ένα τυχαίο διάνυσμα με σ.π.π.

$$f(x, y) = \begin{cases} c(x + y) & \text{για } 0 \leq x \leq y \leq 1 \\ 0 & \text{διαφορετικά.} \end{cases}$$

α. Υπολογίστε την σταθερά  $c$ .

β. Υπολογίστε την περιθώρια κατανομή των  $X, Y$ .

**Άσκηση 3** Το  $(X, Y)$  είναι ένα τυχαίο διάνυσμα με σ.π.π.

$$f(x, y) = \begin{cases} 6x^\alpha y^{\alpha+1} & \text{για } (x, y) \in [0, 1] \times [0, 1] \\ 0 & \text{διαφορετικά.} \end{cases}$$

α. Υπολογίστε την σταθερά  $\alpha$ .

β. Υπολογίστε την πιθανότητα των ενδεχομένων  $\{X \leq 1/3\}$ ,  $\{Y > 2X\}$ ,  $\{X + Y \geq 1\}$ .

**Άσκηση 4** α) Αν οι τ.μ.  $X, Y$  είναι ανεξάρτητες, ισόνομες με συνεχή κατανομή, ποιά είναι η  $\mathbb{P}[X > Y]$ ;

β) Γενικότερα, αν η από κοινού σ.π.π. των  $X, Y$  είναι συμμετρική, δηλαδή  $f(x, y) = f(y, x)$ ,  $\forall x, y \in \mathbb{R}^2$  ποια είναι η  $\mathbb{P}[X > Y]$ ;

**Άσκηση 5** Η από κοινού σ.π.π. των  $X, Y$  είναι  $f(x, y) = 2e^{-x-y}$  αν  $0 \leq x \leq y$  και 0 διαφορετικά. Είναι οι  $X, Y$  ανεξάρτητες;

**Άσκηση 6** Οι τ.μ.  $X, Y$  έχουν από κοινού σ.π.π.  $f(x, y) = \frac{1}{y}$  για  $0 < x < y < 1$  και 0 διαφορετικά.

α) Υπολογίστε την δεσμευμένη σ.π.π. της  $Y$  δεδομένου ότι  $X = x$ .

β) Υπολογίστε την  $\mathbb{P}[X + Y > 1/2]$ .

**Άσκηση 7** Η από κοινού σ.π.π. των  $X, Y$  είναι

$$f(x, y) = cy^\beta(1-x)^\alpha, \quad 0 < y < x < 1,$$

όπου  $\alpha, \beta > -1$ . Να υπολογίσετε

α) Τις περιθώριες σ.π.π. των  $X, Y$

β) Τις δεσμευμένες σ.π.π.  $f_{X|Y}$  και  $f_{Y|X}$ .

γ) Τις δεσμευμένες μέσες τιμές  $\mathbb{E}[X|Y = y]$  και  $\mathbb{E}[Y|X = x]$

**Άσκηση 8** Αν η τ.μ.  $P$  ακολουθεί ομοιόμορφη κατανομή στο  $[0, 1]$  και η δεσμευμένη κατανομή της  $X$  δεδομένου ότι  $P = p$  είναι διωνυμική  $b(n, p)$  υπολογίστε την (περιθώρια) σ.μ.π. της  $X$ .

**Άσκηση 9** Αν  $X, Y$  είναι ανεξάρτητες τ.μ. με κατανομή Poisson και παραμέτρους  $\lambda, \mu$  αντίστοιχα. Υπολογίστε την δεσμευμένη σ.μ.π. της  $X$  δεδομένου ότι  $X + Y = n$ , δηλαδή την  $\mathbb{P}[X = k | X + Y = n]$  για  $k = 0, \dots, n$ .

**Άσκηση 10** Έστω  $\mathcal{A}_N = \{0, \frac{1}{N}, \frac{2}{N}, \dots, \frac{N-1}{N}, 1\}$ . Οι  $X, Y$  είναι τ.μ. με τιμές στο  $\mathcal{A}_N$  και από κοινού συνάρτηση μάζας πιθανότητας

$$p_{x,y} := \mathbb{P}[X = x, Y = y] = C|x - y| \quad \text{για } (x, y) \in \mathcal{A}_N \times \mathcal{A}_N.$$

- α. Ποιες είναι η περιθώριες κατανομές τους;
- β. Ποια είναι η  $\mathbb{E}[X]$ ;
- γ. Ποια είναι η πιθανότητα του ενδεχομένου  $\{X > Y\}$ ;

**Άσκηση 11** Οι χρόνοι εξυπηρέτησης ενός πελάτη από δύο εξυπηρετητές A,B είναι ανεξάρτητες τ.μ. και ακολουθούν εκθετική κατανομή με παραμέτρους  $\alpha$  και  $\beta$  αντίστοιχα. Τη χρονική στιγμή 0 οι A,B είναι ελεύθεροι και δέχονται από ένα πελάτη. Υπολογίστε την πιθανότητα να τελειώσει πρώτα η εξυπηρέτηση του πελάτη που εξυπηρετείται από τον A.

**Άσκηση 12** \*Σε ένα ντουλάπι υπάρχουν 32 διαφορετικά ζευγάρια παπούτσια. Αν βγάλουμε από το ντουλάπι 20 παπούτσια τυχαία, ποιο είναι το αναμενόμενο πλήθος ζευγαριών που θα απομείνουν;