ΘΕΩΡΙΑ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΩΝ & ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ

Σ.Η.Μ.Μ.Υ.- ΦΥΛΛΑΔΙΟ ΑΣΚΗΣΕΩΝ VII

Άσκηση 1 Η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας μιας τ.μ. X είναι $f(x) = Ax^{-4}$ για $x > 2$, και μηδέν διαφορετικά. Υπολογίστε την τιμή της σταθεράς A, και στη συνέχεια τη μέση τιμή και τη διασπορά της X. Για ποιές τιμές του r είναι η ροπή τάξης r πεπερασμένη;

Άσκηση 2 Έχετε n φαινομενικά όμοια κλειδιά, από τα οποία μόνο 1 ανοίγει μια πόρτα. Υπολογίστε τον αναμενόμενο αριθμό προσπαθειών που θα σας πάρει να ανοίξετε την πόρτα στις δύο παρακάτω περιπτώσεις:

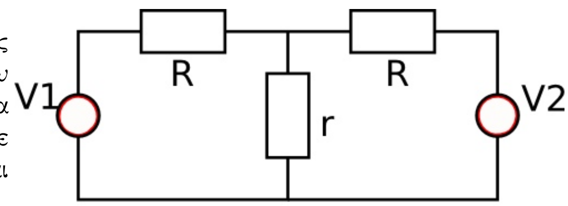
α. Αν κάθε φορά που δοκιμάζετε ένα κλειδί το βάζετε στην άκρη ώστε να μην το ξαναχρησιμοποιήσετε.

β. Αν κάθε φορά δοκιμάζει τυχαία ένα από τα n κλειδιά.

γ. Αν καθένα από τα n κλειδιά ανοίγει μια διαφορετική πόρτα, υπολογίστε το αναμενόμενο πλήθος προσπαθειών μέχρι να ξεκλειδώσετε όλες τις πόρτες για καθεμία από τις παραπάνω περιπτώσεις.

Άσκηση 3 Η συνάρτηση κατανομής μιας τ.μ. X είναι η $F(x) = e^{-e^{-x}}$. Υπολογίστε την $\mathbb{E}\big[e^{\frac{X}{2}}\big]$.

Άσκηση 4 Στο κύκλωμα του διπλανού σχήματος οι πηγές $V1$ και $V2$ δίνουν εναλλασόμενη τάση με την ίδια συχνότητα ω και πλάτος A, ενώ η διαφορά φάσης μεταξύ τους είναι μια τυχαία μεταβλητή Θ με ομοιόμορφη κατανομή στο $[0, 2\pi]$. Υπολογίστε την αναμενόμενη τιμή της στιγμιαίας ισχύος που καταναλώνεται στην αντίσταση r.



Άσκηση 5 Έστω X μια συνεχής τ.μ. με σ.κ.π. F. Δείξτε ότι η $H(c) = \mathbb{E}\big[\,|X - c|\,\big]$ ελαχιστοποιείται αν και μόνο αν $F(c) = 1/2$. Ένα τέτοιο c το ονομάζουμε *διάμεσο τιμή* της X.

Άσκηση 6 *(Ανισότητα Jensen) Αν η $\phi(\cdot)$ είναι μια παραγωγίσιμη, κυρτή συνάρτηση και η X είναι μια τυχαία μεταβλητή με τιμές στο πεδίο ορισμού της ϕ και πεπερασμένη μέση τιμή, αποδείξτε ότι $\mathbb{E}\big[\phi(X)\big] \geq \phi\big(\mathbb{E}[X]\big)$. *Υπόδειξη:* αν η $\phi(\cdot)$ είναι κυρτή το γράφημά της θα βρίσκεται πάνω από την εφαπτομένη της στο σημείο $\mu = \mathbb{E}[X]$. Σαν εφαρμογή, πάρτε $\phi(x) = -\ln x$, $X \sim U(k - \frac{1}{2}, k + \frac{1}{2})$ και δείξτε ότι για κάθε $k \in \mathbb{N}$

$$\int_{k-\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}} \ln(x)dx \leq \ln(k).$$

Προσθέτοντας για $k = 2, 3, \ldots, n$ συμπεράνετε ότι $n! \geq cn^{n+\frac{1}{2}}e^{-n}$ για κάποια σταθερά $c > 0$.

Άσκηση 7 *Έστω $G = (V, E)$ ένας πεπερασμένος γράφος όπου V, E είναι τα σύνολα των κορυφών και των ακμών του αντίστοιχα. Βάφουμε κάθε κορυφή του γράφου κόκκινη (ανεξάρτητα από τις άλλες) με πιθανότητα 1/2.
α. Δείξτε ότι ο αναμενόμενος αριθμός ακμών που τα άκρα τους έχουν διαφορετικά χρώματα είναι $\frac{1}{2}|E|$.
β. Χρησιμοποιώντας το προηγούμενο ερώτημα δείξτε ότι μπορούμε να διαμερίσουμε το σύνολο V σε δύο υποσύνολα έτσι ώστε τουλάχιστον οι μισές ακμές του γράφου να συνδέεουν κορυφές του ενός με κορυφές του άλλου.
Παρατηρήστε ότι το τελικό συμπέρασμα αφορά στη θεωρία γράφων και ότι δεν υπάρχει τίποτα τυχαίο στον ισχυρισμό του! Αυτό είναι ένα παράδειγμα χρήσης της "πιθανοθεωρητικής μεθόδου" (που επινοήθηκε από τον Paul Erdös) για την απόδειξη της ύπαρξης μιας ιδιότητας ανάμεσα στα μέλη μιας κλάσης. Αν σας ενδιαφέρει δείτε και το λήμμα *probabilistic method* στη Wikipedia.