



ΘΕΩΡΙΑ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΩΝ & ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ

Εξεταστική Χειμερινού Εξαμήνου 2014

ΟΜΑΔΑ Α

Άσκηση 1 Έχουμε 5 κέρματα, 1 από τα οποία είναι κανονικό, 3 έχουν δύο όψεις με γράμματα και 1 έχει δύο όψεις με κεφαλή. Επιλέγουμε τυχαία ένα από τα κέρματα και το στρίβουμε χωρίς να δούμε τι όψεις έχει.

- α) Ποια είναι η πιθανότητα να φέρουμε κεφαλή;
- β) Δεδομένου ότι το νόμισμα που στρίψαμε έφερε κεφαλή ποια είναι η πιθανότητα να είναι κάλπικο;
- γ) Αν επαναλάβουμε 84 φορές τη διαδικασία επιλογής ενός κέρματος και στριψίματός του, υπολογίστε προσεγγιστικά την πιθανότητα το πλήθος K των κεφαλών που θα φέρουμε να ικανοποιεί την ανισότητα $20 \leq K < 27$;

Άσκηση 2 Σε ένα δείγμα 100 πτυχιούχων μιας Σχολής, ηλικίας 23-28 ετών, που αποτελείται από 60 άνδρες και 40 γυναίκες, βρέθηκαν 25 άνεργοι άνδρες και 21 άνεργες γυναίκες. Να βρεθεί ένα διάστημα εμπιστοσύνης με βαθμό εμπιστοσύνης (β.ε.) $\gamma = 0.95$ για

- α) Το ποσοστό p_1 των ανέργων ανδρών πτυχιούχων της Σχολής ηλικίας 23-28 ετών.
- β) Το ποσοστό p_2 των ανέργων γυναικών της Σχολής ηλικίας 23-28 ετών.
- γ) Την διαφορά ποσοστών $p_1 - p_2$.

Άσκηση 3 Μια τυχαία μεταβλητή X έχει συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας

$$f(x) = \vartheta^2 e^{-2x - \vartheta e^{-x}}, \quad x \in \mathbb{R}$$

όπου ϑ είναι μια άγνωστη θετική παράμετρος. Έχουμε στη διάθεσή μας ένα τυχαίο δείγμα $\{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$ της X :

- α) Βρείτε την εκτιμήτρια μέγιστης πιθανοφάνειας (Ε.Μ.Π.) T_1 της παραμέτρου ϑ .
- β) Βρείτε την Ε.Μ.Π. T_2 της παραμέτρου $\xi = 1/\vartheta$.
- γ) Ποια είναι η κατανομή της τυχαίας μεταβλητής $Y = 2\vartheta e^{-X}$;
- δ) Κατασκευάστε ένα διάστημα εμπιστοσύνης για την άγνωστη παράμετρο ϑ με β.ε. $\gamma = 0.95$.

Άσκηση 4 Η τυχαία μεταβλητή X έχει ομοιόμορφη κατανομή στο σύνολο $\{1, 2, 3, \dots, N\}$ όπου N είναι άγνωστος φυσικός αριθμός.

- α) Βρείτε την Ε.Μ.Π. $\hat{N}_k$ του N από ένα τυχαίο δείγμα $\{x_1, x_2, \dots, x_k\}$ της X .
- β) Δείξτε ότι για $m \in \{1, 2, \dots, N\}$ έχουμε

$$\mathbb{P}[\hat{N}_k \leq m] = \left(\frac{m}{N}\right)^k.$$

- γ) Υπολογίστε την πιθανότητα $\mathbb{P}[\hat{N}_k = N]$.

- δ) Δείξτε ότι $\mathbb{P}[\hat{N}_{k+1} \neq \hat{N}_k] = \frac{1}{N^{k+1}} \sum_{j=1}^{N-1} j^k$. Το όριο αυτής της πιθανότητας όταν $N \rightarrow \infty$ είναι $1/(k+1)$.

Μπορείτε να ερμηνεύσετε αυτό το αποτέλεσμα διαισθητικά;

Υπόμνηση: $\chi^2(n) = G(\frac{1}{2}, \frac{n}{2})$, όπου η σ.π.π. της $G(\alpha, p)$ είναι $f(x) = \frac{\alpha^p}{\Gamma(p)} x^{p-1} e^{-\alpha x}$.

Διάρκεια εξέτασης 2 ώρες και 30 λεπτά

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!