

# ΘΕΩΡΙΑ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΩΝ & ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ

Σ.Η.Μ.Μ.Υ. ΧΕΙΜΕΡΙΝΟ ΕΞΑΜΗΝΟ 2013

ΦΥΛΛΑΔΙΟ ΑΣΚΗΣΕΩΝ VI για την Παρασκευή 24/1/2014

**Άσκηση 1** Σε μια παρτίδα πόκερ κάθε παίκτης παίρνει αρχικά 5 φύλλα από τα 52 της τράπουλας. Λέμε ότι ένας παίκτης έχει καρέ αν έχει 4 ίδια φύλλα (ένα από κάθε κατηγορία), π.χ. 4 άσους, 4 δεκάρια κ.ο.κ. Ποιος είναι ο αναμενόμενος αριθμός των παρτίδων που πρέπει να παίξει κάποιος μέχρι να του μοιραστεί ένα καρέ; Ποια είναι προσεγγιστικά η πιθανότητα να μην πάρει κανένα καρέ σε τόσες παρτίδες; να πάρει τρία καρέ σε τόσες παρτίδες;

**Άσκηση 2** Η διάρκεια ζωής (σε ώρες) ενός προϊόντος είναι τ.μ. με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας

$$f(x) = \frac{1}{1200} e^{-\frac{x}{1200}}, \quad x > 0.$$

Κάθε μονάδα του προϊόντος έχει κόστος κατασκευής €5.000, πωλείται προς €7.000, και συνοδεύεται από εγγύηση για τη διάρκεια ζωής της. Συγκεκριμένα, αν αυτή είναι μικρότερη από 1000 ώρες το αντίτιμο της αγοράς επιστρέφεται στον αγοραστή, ενώ το προϊόν πωλείται προς €500 ως παλαιό υλικό.

α) Υπολογίστε το αναμενόμενο κέρδος ανά μονάδα προϊόντος.

β) Ποια διάρκεια ζωής πρέπει να προβλέπει η εγγύηση ώστε το αναμενόμενο κέρδος ανά μονάδα προϊόντος να είναι τουλάχιστον €800;

**Άσκηση 3** Η διάρκεια ζωής ενός ανταλλακτικού σε ώρες είναι τ.μ.  $X$  με σ.π.π.

$$f(x) = C e^{-\alpha x^{2/3}}, \quad x > 0.$$

α) Υπολογίστε την σταθερά  $C$ .

β) Υπολογίστε την αναμενόμενη διάρκεια ζωής του ανταλλακτικού.

**Άσκηση 4** Έχετε ένα μικρό ζαχαροπλαστείο και έχετε καταλήξει στην παρατήρηση ότι το πλήθος των κέικ που πωλούνται κάθε μέρα ακολουθεί κατανομή Poisson με παράμετρο 8. Η παρασκευή κάθε κέικ σας κοστίζει €5 ενώ η τιμή διάθεσής του είναι €12. Αν ένα κέικ δεν πουληθεί την ημέρα παρασκευής του πετιέται. Πόσα κέικ πρέπει να φτιάχνετε κάθε μέρα ώστε να μεγιστοποιήσετε το αναμενόμενο κέρδος από την πώλησή τους; Θα χρειαστείτε πίνακες ή τη βοήθεια του υπολογιστή.

**Άσκηση 5** Το μέτρο  $X$  της ταχύτητας ενός μορίου αερίου μάζας  $m$  σε απόλυτη θερμοκρασία  $T$  είναι μια τ.μ. με κατανομή Maxwell-Boltzmann. Συγκεκριμένα η σ.π.π. της δίνεται από την

$$f(x) = \begin{cases} \alpha x^2 e^{-\beta x^2} & \text{για } x > 0 \\ 0 & \text{διαφορετικά,} \end{cases}$$

όπου  $\beta = \frac{m}{2KT}$  και  $\alpha$  είναι μια σταθερά κανονικοποίησης ( $K$  είναι η σταθερά του Boltzmann.)

α) Υπολογίστε τη σταθερά  $\alpha$ .

β) Υπολογίστε την αναμενόμενη τιμή της  $X$ .

γ) Υπολογίστε την αναμενόμενη τιμή της κινητικής ενέργειας  $E = \frac{1}{2}mX^2$ .

(Υπόδειξη:  $\Gamma(p+1) = p\Gamma(p)$  και  $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$ .)

**Άσκηση 6** α) Αν η  $X$  είναι μια μη αρνητική συνεχής τ.μ. αποδείξτε ότι  $\mathbb{E}[X] = \int_0^\infty \mathbb{P}[X > t] dt$ .

β) Αν η  $X$  είναι μια τ.μ. με τιμές στο  $\{0, 1, 2, \dots\}$  αποδείξτε ότι  $\mathbb{E}[X] = \sum_{k=0}^\infty \mathbb{P}[X > k] = \int_0^\infty \mathbb{P}[X > t] dt$ .

**Άσκηση 7** \* Ποιο είναι το αναμενόμενο πλήθος φορών που πρέπει να ρίξουμε ένα ζάρι μέχρι να εμφανιστούν όλες οι όψεις του;