ΘΕΩΡΙΑ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΩΝ & ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ

Σ.Η.Μ.Μ.Υ. ΧΕΙΜΕΡΙΝΟ ΕΞΑΜΗΝΟ 2013

ΦΥΛΛΑΔΙΟ ΑΣΚΗΣΕΩΝ ΧΙ

Άσκηση 1 Ο αριθμός πελατών ανά 24ωρο σε μια ATM ακολουθεί κατανομή Poisson με άγνωστη παράμετρο λ. Εκτιμήστε την λ με βάση τις παρακάτω 15 παρατηρήσεις 24ώρων: 16,22,18,11,14,20,14,25,11,10,18,16,15,12,19.

Άσκηση 2 Ο χρόνος εκτέλεσης παραγγελίας από μια εταιρεία είναι τ.μ. Χ (ημέρες) με κατανομή $G(\alpha,p)$. Με βάση τα δεδομένα 12, 12, 10, 14, 8, 15, 10, 14, 9, 10, να εκτιμηθούν με τη μέθοδο των ροπών οι παράμετροι α, p.

Άσκηση 3 Έστω τυχαίο δείγμα $(x_1,\ldots,x_n)$ από παρατηρήσεις της τ.μ. X με σ.π.π.

$$f(x) = \begin{cases} \alpha^2 x e^{-\alpha x} & ,x > 0 \\ 0 & ,x \leq 0. \end{cases}$$

Βρείτε την ΕΜΠ της άγνωστης παραμέτρου $\alpha > 0$.

Άσκηση 4 Έστω τυχαίο δείγμα $(x_1,\ldots,x_n)$ από παρατηρήσεις της τ.μ. X με σ.π.π.

$$f(x) = \begin{cases} \alpha\theta x^{\alpha-1} e^{-\theta x^{\alpha}} & ,x > 0 \\ 0 & ,x \leq 0, \end{cases}$$

όπου $\alpha > 0$ γνωστό και $\theta > 0$ άγνωστη παράμετρος. Βρείτε την ΕΜΠ της παραμέτρου θ.

Άσκηση 5 Έστω τυχαίο δείγμα $(x_1,\ldots,x_n)$ από παρατηρήσεις της τ.μ. X με σ.π.π.

$$f(x) = \begin{cases} \theta^2 (x+1)(1-\theta)^{-x} & ,0 < x < 1 \\ 0 & ,\text{διαφορετικά}, \end{cases}$$

όπου $\theta \in (0,1)$ άγνωστη παράμετρος. Να βρείτε τις ΕΜΠ για τις παραμέτρους θ και $\alpha(\theta) = \frac{2(1-\theta)}{\theta}$.

Άσκηση 6 Έστω τυχαίο δείγμα $(x_1,\ldots,x_n)$ από παρατηρήσεις της τ.μ. X με σ.π.π.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\theta_2} e^{-\frac{x-\theta_1}{\theta_2}} & ,x > \theta_1 \\ 0 & ,x \leq \theta_1. \end{cases}$$

α) Βρείτε την ΕΜΠ της παραμέτρου θ_1 αν η θ_2 είναι γνωστή παράμετρος.
β) Βρείτε την ΕΜΠ της παραμέτρου θ_2 αν η θ_1 είναι γνωστή παράμετρος.
γ) Βρείτε την ΕΜΠ των παραμέτρων θ_1, θ_2 αν είναι και οι δύο άγνωστες.

Άσκηση 7 Το πλάτος ενός παλμού είναι τ.μ. $X \sim \mathcal{N}(\mu, 4)$. Στην έξοδο ενός δέκτη μπορούμε να παρατηρήσουμε αν το X υπερβαίνει την τιμή 40 ή όχι. Αν σε 100 παρατηρήσεις το X υπερβαίνει την τιμή αυτή 80 φορές ποια είναι η εκτίμηση με την μέθοδο της μέγιστης πιθανοφάνειας της παραμέτρου μ;

Άσκηση 8 Οι $X_1,\ldots,X_n$ είναι ανεξάρτητες, ισόνομες τ.μ. με κατανομή $U(\theta, 2\theta)$, όπου $\theta > 0$ άγνωστη παράμετρος.
α) Βρείτε την κατανομή της τ.μ. $Y = \max\{X_1,\ldots,X_n\}$.
β) Να εξετάσετε αν η δειγματοσυνάρτηση αυτή είναι αμερόληπτη εκτιμήτρια της παραμέτρου θ. Αν δεν είναι προτείνετε μια αμερόληπτη εκτιμήτρια για την θ.

Άσκηση 9 Έστω τυχαίο δείγμα $(x_1,\ldots,x_n)$ από παρατηρήσεις της τ.μ. X με σ.π.π.

$$f(x) = \begin{cases} \theta \frac{1}{x^{\theta+1}} & ,x > 1 \\ 0 & ,x \leq 1. \end{cases}$$

Βρείτε την ΕΜΠ για την άγνωστη παράμετρο θ.

Άσκηση 10 Έστω τυχαίο δείγμα $(x_1, \ldots, x_n)$ από παρατηρήσεις της τ.μ. $X \sim U(-\theta, \theta)$. Βρείτε την ΕΜΠ της παραμέτρου θ. Κάντε το ίδιο αν $X \sim U(\theta - c, \theta + c)$ όπου $c > 0$ είναι γνωστή παράμετρος.

Άσκηση 11 *Βρείτε την ΕΜΠ της άγνωστης παραμέτρου θ από n ανεξάρτητες παρατηρήσεις της τ.μ. X με σ.π.π. $f(x) = \frac{1}{2}e^{-|x-\theta|}$.

Άσκηση 12 Μια εταιρεία κινητής τηλεφωνίας παρέχει στους συνδρομητές της 270 λεπτά δωρεάν χρόνου ομιλίας σε κάθε περίοδο χρέωσης (30 ημέρες.) Η συνολική ημερήσια διάρκεια εξερχόμενων κλήσεων ενός συνδρομητή είναι τ.μ. που ακολουθεί κατανομή Poisson με παράμετρο $\lambda = 7,5$.
α) Υπολογίστε προσεγγιστικά την πιθανότητα p του ενδεχομένου ο συνδρομητής να ξεπεράσει το όριο του δωρεάν χρόνου ομιλίας σε μια περίοδο χρέωσης.
β) Έστω N εκείνη η περίοδος χρέωσης από την έναρξη του συμβολαίου του, κατά την οποία ο συνδρομητής θα ξεπεράσει για πρώτη φορά το όριο του δωρεάν χρόνου. Ποια κατανομή ακολουθεί η τ.μ. N; Ποιά είναι η αναμενόμενη τιμή της;

Άσκηση 13 Οι $X_1, \ldots, X_n$ είναι ανεξάρτητες, ισόνομες, τ.μ. με μέση τιμή μ και διασπορά σ^2. Υπολογίστε το όριο

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\Big[\frac{X_1 + \cdots + X_n}{n} \leq \mu\Big].$$

Χρησιμοποιήστε το παραπάνω αποτέλεσμα για να υπολογίστε το όριο $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1}{3^{3n}} \sum_{k=0}^{2n} \binom{3n}{k} 2^k.$

Άσκηση 14 200 αντιστάσεις είναι συνδεμένες σε σειρά. Η τιμή κάθε αντίστασης είναι μια τ.μ. με μέση τιμή 10 Ohm και τυπική απόκλιση 2 Ohm. Υπολογίστε προσεγγιστικά την πιθανότητα η συνολική αντίσταση να είναι τουλάχιστον 1,9 KOhm.

Άσκηση 15 Ένας παίκτης του μπάσκετ έχει πιθανότητα ευστοχίας 0,75 όταν εκτελεί ελεύθερες βολές και 0,005 όταν σουτάρει από το κέντρο με τα μάτια δεμένα. Αν εκτελέσει 100 βολές υπολογίστε προσεγγιστικά την πιθανότητα οι εύστοχες βολές να είναι μεταξύ 70 και 85. Αν σουτάρει 250 φορές από το κέντρο με δεμένα μάτια υπολογίστε προσεγγιστικά την πιθανότητα να ευστοχήσει σε τουλάχιστον 3 προσπάθειες.