ΘΕΩΡΙΑ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΩΝ & ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ

Σ.Η.Μ.Μ.Υ.- ΦΥΛΛΑΔΙΟ ΑΣΚΗΣΕΩΝ X

Άσκηση 1 Φορτίο q βρίσκεται στη θέση (X, Y, Z) όπου X, Y, Z είναι ανεξάρτητες τ.μ. με κατανομή $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$. Υπολογίστε την σ.π.π. του δυναμικού V στην αρχή των αξόνων και την $\mathbb{E}[V]$, όπου

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{\sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}}.$$

Άσκηση 2 Οι $X_1, X_2, \ldots, X_n$ είναι ανεξάρτητες ισόνομες τ.μ. με κατανομή $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$. Ορίζουμε $\bar{X} = \frac{X_1 + \cdots + X_n}{n}$. Δείξτε ότι η $\bar{X}$ είναι ανεξάρτητη από τις $X_i - \bar{X}$. Ποια είναι η δεσμευμένη σ.π.π. $f_{X_1 | \bar{X}}(x \,|\, \mu)$;

Άσκηση 3 Δείξτε ότι αν το τυχαίο διάνυσμα $(X, Y) \in \mathbb{R}^2$ ακολουθεί τυπική κανονική κατανομή τότε και το διάνυσμα

$$\begin{pmatrix} X' \\ Y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$$

ομοίως ακολουθεί τυπική κανονική κατανομή. Δηλαδή η $\mathcal{N}(\mathbf{0}, \mathbb{I}_2)$ μένει αναλλοίωτη από στροφές.

Άσκηση 4 Οι στοχαστικές διαδικασίες είναι τυχαίες συναρτήσεις, και ένας τρόπος να τις φανταστεί κανείς είναι ότι η τιμή τους κάθε χρονική στιγμή είναι μια τυχαία μεταβλητή. Η κίνηση Brown είναι μια στοχαστική διαδικασία όπου $B_t \sim \mathcal{N}(0, t)$. Αυτό δεν καθορίζει πλήρως την κίνηση Brown αφού την ίδια ιδιότητα έχει και η διαδικασία $Y_t = \sqrt{t}\chi$ όπου $\chi \sim \mathcal{N}(0, 1)$ και $t \geq 0$. Χρειάζεται να καθορίσουμε και το πώς σχετίζονται μεταξύ τους οι τιμές της διαδικασίας σε διαφορετικούς χρόνους, πώς εξελίσσεται δηλαδή η διαδικασία στο χρόνο. Ο τρόπος που αυτό συμβαίνει για την κίνηση Brown είναι ότι για κάθε $s, t \in \mathbb{R}_+$ με $s < t$ η μεταβολή της $B_t - B_s$ είναι ανεξάρτητη από το παρελθόν της, είναι δηλαδή ανεξάρτητη από τις τ.μ. B_r με $r \leq s$ με κατανομή $\mathcal{N}(0, t - s)$. Αν $r < s < t$ βρείτε την από κοινού κατανομή των B_r, B_s, B_t και την δεσμευμένη σ.π.π. της B_s δεδομένων των B_r, B_t.

Άσκηση 5 Αν οι X, Y είναι ανεξάρτητες, ισόνομες τυχαίες μεταβλητές με σ.κ.π. F, βρείτε την σ.κ.π. της $X \wedge Y = \min\{X, Y\}$, την σ.κ.π. της $X \vee Y = \max\{X, Y\}$ και την από κοινού σ.κ.π. των $X \vee Y$ και $X \wedge Y$.

Άσκηση 6 Οι X, Y είναι τ.μ. που παίρνουν τιμές στο [0,1]. Η από κοινού σ.κ.π. τους για $(x, y) \in [0, 1] \times [0, 1]$ δίνεται από την $F(x, y) = \frac{1}{2}x^2y^2 + \frac{1}{2}(x \wedge y)$.
α) Βρείτε τις περιθώριες σ.κ.π. των X, Y και συμπεράνετε ότι καθεμιά τους είναι συνεχής τ.μ.
β) Ας είναι $U_0, \ldots, U_4$ ανεξάρτητες ισόνομες τυχαίες μεταβλητές με ομοιόμορφη κατανομή στο [0,1]. Στρίβουμε ένα τίμιο κέρμα. Αν έρθει κορώνα ορίζουμε $X = Y = U_0$. Αν έρθει γράμματα ορίζουμε $X = U_1 \vee U_2$ και $Y = U_3 \vee U_4$. Ποια είναι η από κοινού σ.κ.π. των (X, Y);
γ) Υπολογίστε την $f(x, y) = \frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x \partial y}$ όπου αυτή υπάρχει και στην συνέχεια το ολοκλήρωμα της f στο $[0, 1] \times [0, 1]$. Γιατί το αποτέλεσμα δεν είναι 1;

Άσκηση 7 Θεωρήστε μια ακολουθία $U_1, U_2, \ldots$ από ανεξάρτητες, ισόνομες τ.μ. με ομοιόμορφη κατανομή στο [0,1]. Αν $E_n = n(1 - \max_{1 \leq i \leq n} U_i)$ υπολογίστε την σ.κ.π. της E_n και δείξτε ότι καθώς $n \to \infty$ αυτή συγκλίνει στην σ.κ.π. μιας εκθετικής τ.μ. με μέση τιμή 1.

Άσκηση 8 Οι X, Y είναι ανεξάρτητες τ.μ. με εκθετική κατανομή $\mathcal{E}xp(\lambda)$. Ορίζουμε $U = X \wedge Y$ και $V = |X - Y|$. Υπολογίστε με ένα διπλό ολοκλήρωμα την πιθανότητα $\mathbb{P}\big[U \leq u,\ V \leq v\big]$ και συμπεράνετε ότι οι U, V είναι ανεξάρτητες τ.μ. με κατανομή $\mathcal{E}xp(2\lambda)$ και $\mathcal{E}xp(\lambda)$ αντίστοιχα. Ερμηνεύστε διαισθητικά αυτό το αποτέλεσμα!

Άσκηση 9 *Σ' ένα ψηφιακό κανάλι η πιθανότητα λανθασμένης λήψης ενός ψηφίου είναι p ανεξάρτητα από τα άλλα ψηφία. Αν S_N είναι το πλήθος των σφαλμάτων κατά την μετάδοση N ψηφίων
α) Υπολογίστε την αναμενόμενη τιμή και την διασπορά του S_N.
β) Βρείτε ένα άνω φράγμα για την πιθανότητα να συμβούν πάνω από $\delta p N$ σφάλματα $(\delta > 1)$ κατά τη μετάδοση N ψηφίων, χρησιμοποιώντας την ανισότητα Chebyshev.

γ) (Φράγματα Chernoff) Παρατηρώντας ότι για κάθε $\lambda > 0$ έχουμε $\{S_N > \delta p N\} \Leftrightarrow \left\{e^{\lambda S_N} > e^{\delta p \lambda N}\right\}$ και χρησιμοποιώντας την ανισότητα Markov βρείτε ένα ακόμα καλύτερο άνω φράγμα (που πέφτει εκθετικά με το N.) (Υπόδειξη: Ορίζοντας τις τ.μ. X_i με τιμή 1 ή 0 ανάλογα με το αν συμβαίνει λάθος ή όχι στη λήψη του i-στού ψηφίου, έχουμε $S_N = \sum_{i=1}^{N} X_i$.)