

ΘΕΩΡΙΑ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΩΝ & ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ

Σ.Η.Μ.Μ.Υ. ΦΥΛΛΑΔΙΟ ΑΣΚΗΣΕΩΝ Ι

Άσκηση 1 Στο παιχνίδι του μπριτζ τα 52 φύλλα της τράπουλας μοιράζονται (από 13) σε 4 παίκτες, N, S, E, W . Ας συμβολίζουμε με N_k το ενδεχόμενο ο παίκτης N να πάρει τουλάχιστον k άσους, και αντίστοιχα για τους άλλους παίκτες. Τι μπορούμε να πούμε για το πλήθος των άσων που έχει ο W σε κάθενα από τα παρακάτω ενδεχόμενα.

- α) W_1^c , γ) $N_2 \cap S_2$, ε) $W_2 \setminus W_3$,
β) $N_1 \cap S_2 \cap W_1$, δ) $(N_2 \cup S_2) \cap E_2$, στ) $N_1^c \cap S_1^c \cap E_1^c$.

Άσκηση 2 Γράψτε τις 24 δυνατές διατάξεις των ψηφίων 1,2,3 και 4. Αν αποδώσουμε πιθανότητα $\frac{1}{24}$ σε καθεμία από αυτές και συμβολίσουμε με A_i το ενδεχόμενο το ψηφίο i να εμφανίζεται στη θέση i , υπολογίστε την πιθανότητα των ενδεχομένων $A_1, A_2, A_1 \cup A_2, A_1 \cap A_2$ και επαληθεύστε την ταυτότητα

$$\mathbb{P}[A_1 \cup A_2] = \mathbb{P}[A_1] + \mathbb{P}[A_2] - \mathbb{P}[A_1 \cap A_2].$$

Άσκηση 3 Θεωρήστε το χώρο πιθανότητας $\Omega = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} : a, b, c \in \{0, 1\} \right\}$. Αν

$$\mathbb{P} \left[\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \right] = K(a + b + c)$$

όπου K είναι μια σταθερά, υπολογίστε την K και στην συνέχεια την πιθανότητα του ενδεχομένου $A = \{P \in \Omega : \text{ο } P \text{ είναι αντιστρέψιμος}\}$.

Άσκηση 4 Δύο ενδεχόμενα A, B έχουν πιθανότητα $\frac{2}{3}$ και $\frac{1}{2}$ αντίστοιχα. Ποιά είναι η μικρότερη και η μεγαλύτερη τιμή που μπορεί να πάρει η $\mathbb{P}[A \cap B]$; Δώστε παραδείγματα χώρων πιθανότητας και ενδεχομένων A, B όπου η πιθανότητα της τομής λαμβάνει τη μικρότερη και τη μεγαλύτερη δυνατή τιμή.

Άσκηση 5 Τρεις παίκτες, A, B, Γ παίζουν σε ένα τουρνουά ταβλιού. Αρχικά παίζουν ο A με τον B και ο Γ κάθετα. Στη συνέχεια, ο νικητής κάθε παρτίδας παίζει με τον παίκτη που καθόταν στην προηγούμενη παρτίδα, ώσπου ένας παίκτης να κερδίσει δύο διαδοχικές παρτίδες, οπότε κερδίζει και το παιχνίδι.

- α) Περιγράψτε τον χώρο των δυνατών εχβάσεων του παιχνιδιού.
β) Αν αποδώσουμε πιθανότητα $\frac{1}{2^k}$ σε κάθε έκβαση που το παιχνίδι διαρκεί k παρτίδες υπολογίστε την πιθανότητα νίκης κάθε παίκτη.

Άσκηση 6 Ένας μαθηματικός και ένας αριστοκράτης εμπλέκονται σε μια μονομαχία. Πυροβολούν εναλλάξ, με τον μαθηματικό να ξεκινά πρώτος, ώσπου ένας από τους δύο να χτυπηθεί. Αν κάθε φορά που πυροβολεί ο μαθηματικός η πιθανότητα ευστοχίας του είναι p και αντίστοιχα η πιθανότητα ευστοχίας για τον αριστοκράτη είναι q , υπολογίστε την πιθανότητα να βγει νικητής ο μαθηματικός.

Άσκηση 7 Ένα δοχείο έχει 10 κόκκινες και 5 μαύρες σφαίρες. Επιλέγουμε τυχαία μια σφαίρα, βλέπουμε το χρώμα της και την επιστρέφουμε στο δοχείο μαζί με άλλες 3 σφαίρες του ίδιου χρώματος. Στη συνέχεια επιλέγουμε ακόμη μια σφαίρα από το δοχείο.

- α) Ποια είναι η πιθανότητα η δεύτερη σφαίρα να είναι κόκκινη;
β) Ποια είναι η πιθανότητα η πρώτη σφαίρα να ήταν κόκκινη αν η δεύτερη σφαίρα είναι μαύρη;

Άσκηση 8 Ένα ψηφιακό σύστημα επικοινωνίας αποτελείται από ένα πομπό και ένα δέκτη. Για τη μετάδοση ενός bit ο πομπός στέλνει ένα σήμα που αντιστοιχεί είτε στο ψηφίο 0 είτε στο ψηφίο 1. Ο δέκτης λαμβάνει το σήμα (παραμορφωμένο ενδεχομένως) και προσπαθεί να ερμηνεύσει το ψηφίο εκπομπής. Θεωρήστε τα παρακάτω ενδεχόμενα:

$$\Pi_0 = \{\text{ο πομπός εκπέμπει } 0\}, \quad \Delta_0 = \{\text{ο δέκτης ερμηνεύει } 0\},$$

$$\Pi_1 = \{\text{ο πομπός εκπέμπει } 1\}, \quad \Delta_1 = \{\text{ο δέκτης ερμηνεύει } 1\}.$$

Υποθέτουμε ότι $\mathbb{P}[\Pi_0] = \frac{4}{5}$, $\mathbb{P}[\Delta_0 | \Pi_0] = \frac{99}{100}$, και $\mathbb{P}[\Delta_1 | \Pi_1] = \frac{97}{100}$.

- α) Ποια είναι η πιθανότητα να συμβεί σφάλμα κατά τη μετάδοση;
β) Ποιά είναι η πιθανότητα να έχει συμβεί σφάλμα, αν ο δέκτης έχει ερμηνεύσει το ψηφίο μετάδοσης ως 1;

Άσκηση 9 * Ο παίκτης A στρίβει ν φορές ένα (δίκαιο) νόμισμα και ο παίκτης B στρίβει το ίδιο νόμισμα $\nu + 1$ φορές. Ποια είναι η πιθανότητα ο B να φέρει αυστηρά περισσότερες φορές γράμματα απ' όσες ο A ;