



ΘΕΩΡΙΑ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΩΝ & ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ

Εξεταστική Φεβρουαρίου 2015

Άσκηση 1 Το τυχαίο διάνυσμα (X, Y) έχει συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας

$$f_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} Ae^{-\frac{x^2}{2}} & \text{αν } 0 < y < x \\ 0 & \text{διαφορετικά.} \end{cases}$$

α) Υπολογίστε την τιμή της σταθεράς A .

β) Δείξτε ότι η σ.π.π. της τ.μ. X είναι η $f_X(x) = xe^{-\frac{x^2}{2}}$ για $x > 0$ και 0 διαφορετικά.

γ) Δείξτε ότι η τ.μ. X^2 ακολουθεί κατανομή $\chi^2(2)$.

δ) Δείξτε ότι η τ.μ. $U = Y/X$ είναι ανεξάρτητη της X και ακολουθεί ομοιόμορφη κατανομή στο $(0,1)$.

Άσκηση 2 Θέλετε να εκτιμήσετε το ποσοστό των ανθρώπων που κάνουν ειλικρινή φορολογική δήλωση. Στην περυσινή σας απόπειρα, στην ερώτησή “κάνετε ειλικρινή φορολογική δήλωση;” όλοι απάντησαν ΝΑΙ. Υποπτεύεστε ότι μπορεί κάποιοι να απάντησαν ψέματα, γιατί φέτος αποφασίσατε να ακολουθήσετε μια διαφορετική στρατηγική. Θα δίνετε στους ερωτώμενους ένα ζάρι το οποίο θα ρίχνουν κρυφά από εσάς. Αν φέρουν 1 ή 6 θα απαντούν στην ερώτησή σας ειλικρινά, ενώ αν φέρουν 2,3,4 ή 5 θα απαντούν ψέματα. Σκέφτεστε ότι έτσι κανείς δεν θα φοβάται να απαντήσει ΟΧΙ, αφού αυτό μπορεί να συμβεί επειδή έκανε μεν ειλικρινή δήλωση, αλλά έφερε 2,3,4 ή 5, κάτι που εσείς δεν μπορείτε να ξέρετε.

α) Υπολογίστε την πιθανότητα q να απαντήσει κάποιος στην ερώτησή σας ΝΑΙ, σαν συνάρτηση του ποσοστού p των ανθρώπων που έκαναν ειλικρινή δήλωση.

β) Υπολογίστε την πιθανότητα να έκανε ειλικρινή δήλωση κάποιος που έχει απαντήσει στην ερώτησή σας ΝΑΙ.

γ) Θα κάνετε την ερώτηση σε $n = 2400$ τυχαία επιλεγμένα άτομα. Ποια κατανομή και με ποιες παραμέτρους ακολουθεί ο αριθμός N των ατόμων που απαντούν ΝΑΙ;

δ) Υπολογίστε την ΕΜΠ $\hat{q}$ της παραμέτρου q από το πλήθος N των θετικών απαντήσεων.

ε) Υπολογίστε την ΕΜΠ $\hat{p}$ της παραμέτρου p από το πλήθος N των θετικών απαντήσεων.

στ) Αν στην ερώτησή σας απάντησαν ΝΑΙ 960 άτομα βρείτε ένα προσεγγιστικό 0,90-διάστημα εμπιστοσύνης για την άγνωστη παράμετρο p .

Διάρκεια εξέτασης 2 ώρες και 30 λεπτά

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!