ΘΕΩΡΙΑ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΩΝ & ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ
Σ.Η.Μ.Μ.Υ.- ΦΥΛΛΑΔΙΟ ΑΣΚΗΣΕΩΝ IV

Άσκηση 1 Στρίβουμε ένα νόμισμα 4 φορές και συμβολίζουμε με X το μήκος της μεγαλύτερης ακολουθίας από ίδια διαδοχικά αποτελέσματα. Ποια είναι η συνάρτηση κατανομής της X;

Άσκηση 2 Η πιθανότητα νίκης μας σε μια παρτίδα ενός παιχνιδιού είναι p. Πριν από κάθε παρτίδα έχουμε δικαιώμα να στοιχηματίσουμε ένα ποσόν, το οποίο διπλασιάζεται αν κερδίσουμε την παρτίδα και χάνεται αν χάσουμε την παρτίδα. Ξεκινάμε στοιχηματίζοντας 1 στην πρώτη παρτίδα και κάθε φορά που χάνουμε διπλασιάζουμε το στοίχημά μας ώσπου να κερδίσουμε μια παρτίδα. Έχουμε δει ότι με πιθανότητα 1 αυτό θα συμβεί σε πεπερασμένο πλήθος παρτίδων. Ποιο θα είναι το συνολικό μας κέρδος από την αρχή του παιχνιδιού μέχρι και την πρώτη μας νίκη; Αν η τυχαία μεταβλητή K είναι το πλήθος των παρτίδων που παίζουμε μέχρι την πρώτη μας νίκη, ποια κατανομή ακολουθεί η K; Ας υποθέσουμε τώρα ότι έχουμε αρχική περιουσία $2^n - 1$ οπότε δεν μπορούμε να αντέξουμε περισσότερες από n χαμένες παρτίδες. Ποια είναι η πιθανότητα να χάσουμε όλη μας την περιουσία πριν προλάβουμε να κερδίσουμε κάποια παρτίδα; Έστω K_n το πλήθος των παρτίδων που παίζουμε μέχρι είτε να σημειώσουμε μια νίκη, είτε να τελειώσει η περιουσία μας, δηλαδή $K_n = \min\{K, n\}$. Ποια είναι η κατανομή του κέρδους μας τη στιγμή K_n;

Άσκηση 3 Ένας φούρνος εξυπηρετεί ένα χωριό με 200 οικογένειες και κάθε μέρα φτιάχνει 6 κέικ. Ο φούρναρης εκτιμά ότι κάθε μέρα μια οικογένεια έχει πιθανότητα $p = 0.02$ να ζητήσει ένα κέικ ανεξάρτητα από τις άλλες.
α) Υπολογίστε την ακριβή σ.μ.π. των κέικ που πωλούνται κάθε μέρα.
β) Πώς διαμορφώνεται η απάντηση στο 1ο ερώτημα αν χρησιμοποιήσουμε την προσέγγιση Poisson για το πλήθος των οικογενειών που θέλουν να αγοράσουν κέικ σε μια μέρα;
γ) Εκτιμήστε την πιθανότητα του ενδεχομένου να πουληθούν και τα 6 κέικ (θα χρειαστείτε πίνακες για την κατανομή Poisson ή τη βοήθεια του Η/Υ σας.)

Άσκηση 4 Αν F είναι η συνάρτηση κατανομής της τ.μ. X, ποιά είναι η συνάρτηση κατανομής των παρακάτω τυχαίων μεταβλητών; α) $Y = aX + b$ για $a > 0$, β) $Y = aX + b$ για $a < 0$, γ) $Z = X^+ = \max\{0, X\}$, δ) $E = e^X$.

Άσκηση 5 Ποιες από τις παρακάτω συναρτήσεις είναι συναρτήσεις κατανομής; α) $F(x) = e^{-e^{-x}}$, β) $G(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$, γ) $E(x) = \frac{e^x}{1+e^x}$, δ) $H(x) = (1 - e^{[-x]})^+$

Άσκηση 6 Οι X, Y είναι τ.μ. με συναρτήσεις κατανομής F_X, F_Y αντίστοιχα. Στρίβουμε ένα κέρμα και ορίζουμε $Z = X$ αν το αποτέλεσμα είναι κεφαλή και $Z = Y$ αν το αποτέλεσμα είναι γράμματα. Ποια είναι η σ.κ.π. της Z;

Άσκηση 7 Μια διακριτή τ.μ. X παίρνει τιμές στο $\mathbb{N}$ και έχει συνάρτηση μάζας πιθανότητας $p_n = Cn^{-s}$ για κάποια σταθερά C και κάποιο $s > 1$. Ποια πρέπει να είναι η C σαν συνάρτηση του s; Ποια είναι η πιθανότητα του ενδεχομένου η X να είναι πολλαπλάσιο του 7;

Άσκηση 8 *Αν η σ.κ.π. F της τ.μ. X είναι γνησίως αύξουσα, ποια κατανομή ακολουθεί η τ.μ. $F(X)$; ακολουθεί την ομοιόμορφη κατανομή στο [0,1]. Πώς θα μπορούσατε εμπνεόμενοι από την άσκηση να προσομοιώσετε στον υπολογιστή σας μια τυχαία μεταβλητή με σ.κ.π. $F(x) = (1 + e^{-x})^{-1}$ με τη βοήθεια μιας γεννήτριας τυχαίων αριθμών στο [0,1];