

ΘΕΩΡΙΑ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΩΝ & ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ

Σ.Η.Μ.Μ.Υ. ΧΕΙΜΕΡΙΝΟ ΕΞΑΜΗΝΟ 2012

ΦΥΛΛΑΔΙΟ ΑΣΚΗΣΕΩΝ ΙΧ για την Πέμπτη 10/1/2013

Άσκηση 1 Αν οι X, Y είναι ανεξάρτητες, ισόνομες τ.μ. με πεπερασμένη διασπορά, υπολογίστε την συνδιακύμανση των τ.μ. $U = \alpha X + \beta Y$ και $V = \beta X - \alpha Y$ για $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Άσκηση 2 Θεωρήστε X, Y, Z τ.μ. ορισμένες στον ίδιο χώρο πιθανότητας με $\mathbb{E}[X^2], \mathbb{E}[Y^2] < \infty$, $\text{Cov}(X, Y) = 1$, $Z \sim \mathcal{N}(0, 1)$ και Z ανεξάρτητη από τις X, Y . Υπολογίστε την $\text{Cov}(XZ^2, Y + Z)$.

Άσκηση 3 Έχετε γράψει n διαφορετικές χριστουγεννιάτικες κάρτες σε φίλους σας και n φακέλους με τις διευθύνσεις τους. Ανακατεύετε τους φακέλους και βάζετε μέσα σε καθέναν μια κάρτα στην τύχη. Θέτουμε $X_i = 0$ ή 1 , ανάλογα αν η i -στή κάρτα τοποθετήθηκε στο σωστό φάκελο και Y το πλήθος των καρτών που τοποθετήθηκαν στο σωστό φάκελο.

α) Υπολογίστε την συνδιακύμανση των X_i, X_j και σχολιάστε το πρόσημό της.

β) Υπολογίστε την μέση τιμή και την διασπορά της Y .

Άσκηση 4 Οι τ.μ. X, Y έχουν από κοινού σ.π.π. $f(x, y) = \frac{1}{y}$ για $0 < x < y < 1$ και 0 διαφορετικά.

α) Υπολογίστε την δεσμευμένη σ.π.π. της Y δεδομένου ότι $X = x$.

β) Υπολογίστε την $\mathbb{P}[X + Y > 1/2]$.

Άσκηση 5 Η από κοινού σ.π.π. των X, Y είναι

$$f(x, y) = cy^\beta(1-x)^\alpha, \quad 0 < y < x < 1,$$

όπου $\alpha, \beta > -1$. Να υπολογίσετε

α) Τις περιθώριες σ.π.π. των X, Y

β) Τις δεσμευμένες σ.π.π. $f_{X|Y}$ και $f_{Y|X}$.

γ) Τις δεσμευμένες μέσες τιμές $\mathbb{E}[X|Y = y]$ και $\mathbb{E}[Y|X = x]$

Άσκηση 6 Αν η τ.μ. P ακολουθεί ομοιόμορφη κατανομή στο $[0, 1]$ και η δεσμευμένη κατανομή της X δεδομένου ότι $P = p$ είναι διωνυμική $b(n, p)$ υπολογίστε την (περιθώρια) σ.μ.π. της X .

Άσκηση 7 Οι $X_1, X_2, \dots, X_n$ είναι ανεξάρτητες ισόνομες τ.μ. με κατανομή $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$. Ορίζουμε $\bar{X} = \frac{X_1 + \dots + X_n}{n}$. Δείξτε ότι η $\bar{X}$ είναι ανεξάρτητη από τις $X_i - \bar{X}$. Ποια είναι η δεσμευμένη σ.π.π. $f_{X_1|\bar{X}}(x|\mu)$;

Άσκηση 8 Δείξτε ότι αν το τυχαίο διάνυσμα $(X, Y) \in \mathbb{R}^2$ ακολουθεί τυπική κανονική κατανομή τότε και το διάνυσμα

$$\begin{pmatrix} X' \\ Y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$$

ομοίως ακολουθεί τυπική κανονική κατανομή. Δηλαδή η $\mathcal{N}(\mathbf{0}, \mathbb{I}_2)$ μένει αναλλοίωτη από στροφές.

Άσκηση 9 Οι στοχαστικές διαδικασίες είναι τυχαίες συναρτήσεις, και ένας τρόπος να τις φανταστεί κανείς είναι ότι η τιμή τους κάθε χρονική στιγμή είναι μια τυχαία μεταβλητή. Η κίνηση Brown είναι μια στοχαστική διαδικασία όπου $B_t \sim \mathcal{N}(0, t)$. Αυτό δεν καθορίζει πλήρως την κίνηση Brown αφού την ίδια ιδιότητα έχει και η διαδικασία $Y_t = \sqrt{t}\chi$ όπου $\chi \sim \mathcal{N}(0, 1)$ και $t \geq 0$. Χρειάζεται να καθορίσουμε και το πώς σχετίζονται μεταξύ τους οι τιμές της διαδικασίας σε διαφορετικούς χρόνους, πώς εξελίσσεται δηλαδή η διαδικασία στο χρόνο. Ο τρόπος που αυτό συμβαίνει για την κίνηση Brown είναι ότι για κάθε $s, t \in \mathbb{R}_+$ με $s < t$ η μεταβολή της $B_t - B_s$ είναι ανεξάρτητη από το παρελθόν της, είναι δηλαδή ανεξάρτητη από τις τ.μ. B_r με $r \leq s$ με κατανομή $\mathcal{N}(0, t - s)$. Αν $r < s < t$ βρείτε την από κοινού κατανομή των B_r, B_s, B_t και την δεσμευμένη σ.π.π. της B_s δεδομένων των B_r, B_t .

Άσκηση 10 Αν οι X, Y είναι ανεξάρτητες, ισόνομες τυχαίες μεταβλητές με σ.κ.π. F , βρείτε την σ.κ.π. της $X \wedge Y = \min\{X, Y\}$, την σ.κ.π. της $X \vee Y = \max\{X, Y\}$ και την από κοινού σ.κ.π. των $X \vee Y$ και $X \wedge Y$.

Άσκηση 11 Οι χρόνοι εξυπηρέτησης ενός πελάτη από δύο εξυπηρετητές A,B είναι ανεξάρτητες τ.μ. και ακολουθούν εκθετική κατανομή με παραμέτρους α και β αντίστοιχα. Τη χρονική στιγμή 0 οι A,B είναι ελεύθεροι και δέχονται από ένα πελάτη. Υπολογίστε την πιθανότητα να τελειώσει πρώτα η εξυπηρέτηση του πελάτη που εξυπηρετείται από τον A.

Άσκηση 12 Οι X, Y είναι ανεξάρτητες τ.μ. με εκθετική κατανομή $Exp(\lambda)$. Ορίζουμε $U = X \wedge Y$ και $V = |X - Y|$. Υπολογίστε με ένα διπλό ολοκλήρωμα την πιθανότητα $\mathbb{P}[U \leq u, V \leq v]$ και συμπεράνετε ότι οι U, V είναι ανεξάρτητες τ.μ. με κατανομή $Exp(2\lambda)$ και $Exp(\lambda)$ αντίστοιχα. Ερμηνεύστε διαισθητικά αυτό το αποτέλεσμα!

Άσκηση 13 *Οι X, Y είναι ανεξάρτητες τ.μ. με τιμές στο $\mathbb{N}$ και σ.μ.π. $p_n = \frac{1}{\zeta(s)n^s}$ για κάποιο $s > 1$, όπου $\zeta(\cdot)$ είναι η συνάρτηση του Riemann

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}.$$

α) Δείξτε ότι αν $2 = p_1 < p_2 < \dots$ είναι η ακολουθία των πρώτων αριθμών τότε τα ενδεχόμενα $E_i = \{p_i/X\}$ είναι ανεξάρτητα.

β) Εξηγήστε γιατί έχουμε $\bigcap_i E_i^c = \{X = 1\}$ και συμπεράνετε την ταυτότητα του Euler

$$\frac{1}{\zeta(s)} = \prod_{i=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{p_i^s}\right).$$

γ) Αν οι X, Y είναι ανεξάρτητες τ.μ. με αυτήν την κατανομή, υπολογίστε την πιθανότητα οι X, Y να είναι σχετικά πρώτοι.