# ΘΕΩΡΙΑ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΩΝ & ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ

**Σ.Η.Μ.Μ.Υ. ΧΕΙΜΕΡΙΝΟ ΕΞΑΜΗΝΟ 2012**

ΦΥΛΛΑΔΙΟ ΑΣΚΗΣΕΩΝ VIII για την Πέμπτη 10/1/2013

**Άσκηση 1** Η από κοινού σ.π.π. των $X, Y$ είναι $f(x) = 2e^{-x-y}$ αν $0 \leq x \leq y$ και 0 διαφορετικά. Είναι οι $X, Y$ ανεξάρτητες;

**Άσκηση 2** Ο Ορφέας και η Ευριδίκη δίνουν ραντεβού γαι τις 12:30. Οι χρόνοι άφιξης του καθενός είναι ανεξάρτητες τ.μ. με ομοιόμορφη κατανομή στο διάστημα 12:00–13:00. Βρείτε την κατανομή του χρόνου αναμονής αυτού που θα φτάσει πρώτος. Ποια είναι η σ.κ.π του χρόνου που ο Ορφέας περιμένει την Ευρυδίκη;

**Άσκηση 3** Οι χρόνοι εξυπηρέτησης ενός πελάτη από δύο εξυπηρετητές Α,Β είναι ανεξάρτητες τ.μ. και ακολουθούν εκθετική κατανομή με παραμέτρους $\alpha$ και $\beta$ αντίστοιχα. Τη χρονική στιγμή 0 οι Α,Β είναι ελεύθεροι και δέχονται από ένα πελάτη. Υπολογίστε την πιθανότητα να τελειώσει πρώτα η εξυπηρέτηση του πελάτη που εξυπηρετείται από τον Α.

**Άσκηση 4** Θεωρούμε τις τ.μ. $X, Y$ με διασπορά $V(X) = V(Y) = 1$. Η διασπορά του αθροίσματός τους είναι $V(X + Y) = 3$. Μπορεί οι $X, Y$ να είναι ανεξάρτητες; Αν οι $X$ και $X - \alpha Y$ είναι ανεξάρτητες τι μπορούμε να συμπεράνουμε για την σταθερά $\alpha$;

**Άσκηση 5** Έστω $U$ τ.μ. με ομοιόμορφη κατανομή στο [0,1]. Αν $X_i \in \{0, 1, \ldots, 9\}$ είναι το $i$-στό δεκαδικό ψηφίο της $U$ δείξτε ότι οι $X_i$ είναι ανεξάρτητες τ.μ.

**Άσκηση 6** Φορτίο $q$ βρίσκεται στη θέση $(X, Y, Z)$ όπου $X, Y, Z$ είναι ανεξάρτητες τ.μ. με κατανομή $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$. Υπολογίστε την σ.π.π. του δυναμικού $V$ στην αρχή των αξόνων και την $\mathbb{E}[V]$, όπου

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{\sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}}.$$

**Άσκηση 7** Οι $X, Y$ είναι τ.μ. που παίρνουν τιμές στο [0,1]. Η από κοινού σ.κ.π. τους για $(x, y) \in [0, 1] \times [0, 1]$ δίνεται από την $F(x, y) = \frac{1}{2}x^2y^2 + \frac{1}{2}(x \wedge y)$.

α) Βρείτε τις περιθώριες σ.κ.π. των $X, Y$ και συμπεράνετε ότι καθεμιά τους είναι συνεχής τ.μ.

β) Ας είναι $U_0, \ldots, U_4$ ανεξάρτητες ισόνομες τυχαίες μεταβλητές με ομοιόμορφη κατανομή στο [0,1]. Στρίβουμε ένα τίμιο κέρμα. Αν έρθει κορώνα ορίζουμε $X = Y = U_0$. Αν έρθει γράμματα ορίζουμε $X = U_1 \vee U_2$ και $Y = U_3 \vee U_4$. Ποια είναι η από κοινού σ.κ.π. των $(X, Y)$;

γ) Υπολογίστε την $f(x, y) = \frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x \partial y}$ όπου αυτή υπάρχει και στην συνέχεια το ολοκλήρωμα της $f$ στο $[0, 1] \times [0, 1]$. Γιατί το αποτέλεσμα δεν είναι 1;

**Άσκηση 8** Θεωρήστε μια ακολουθία $U_1, U_2, \ldots$ από ανεξάρτητες, ισόνομες τ.μ. με ομοιόμορφη κατανομή στο [0,1]. Αν $E_n = n(1 - \max_{1 \leq i \leq n} U_i)$ υπολογίστε την σ.κ.π. της $E_n$ και δείξτε ότι καθώς $n \to \infty$ αυτή συγκλίνει στην σ.κ.π. μιας εκθετικής τ.μ. με μέση τιμή 1.

**Άσκηση 9** Οι $X, Y$ είναι ανεξάρτητες τ.μ. με εκθετική κατανομή $\mathcal{E}xp(\lambda)$. Ορίζουμε $U = X \wedge Y$ και $V = |X - Y|$. Υπολογίστε με ένα διπλό ολοκλήρωμα την πιθανότητα $\mathbb{P}\big[U \leq u,\ V \leq v\big]$ και συμπεράνετε ότι οι $U, V$ είναι ανεξάρτητες τ.μ. με κατανομή $\mathcal{E}xp(2\lambda)$ και $\mathcal{E}xp(\lambda)$ αντίστοιχα. Ερμηνεύστε διαισθητικά αυτό το αποτέλεσμα!

**Άσκηση 10** *Σ' ένα ψηφιακό κανάλι η πιθανότητα λανθασμένης λήψης ενός ψηφίου είναι $p$ ανεξάρτητα από τα άλλα ψηφία. Αν $S_N$ είναι το πλήθος των σφαλμάτων κατά την μετάδοση $N$ ψηφίων

α) Υπολογίστε την αναμενόμενη τιμή και την διασπορά του $S_N$.

β) Βρείτε ένα άνω φράγμα για την πιθανότητα να συμβούν πάνω από $\delta p N$ σφάλματα ($\delta > 1$) κατά τη μετάδοση $N$ ψηφίων, χρησιμοποιώντας την ανισότητα Chebyshev.

γ) (Φράγματα Chernoff) Παρατηρώντας ότι για κάθε $\lambda > 0$ έχουμε $\{S_N > \delta p N\} \Leftrightarrow \big\{e^{\lambda S_N} > e^{\delta p \lambda N}\big\}$ και χρησιμοποιώντας την ανισότητα Markov βρείτε ένα ακόμα καλύτερο άνω φράγμα (που πέφτει εκθετικά με το $N$.)