ΘΕΩΡΙΑ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΩΝ & ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ

Σ.Η.Μ.Μ.Υ. ΧΕΙΜΕΡΙΝΟ ΕΞΑΜΗΝΟ 2012

ΦΥΛΛΑΔΙΟ ΑΣΚΗΣΕΩΝ VII για την Παρασκευή 14/12/2012

Άσκηση 1 Έστω $\mathcal{A}_N = \{0, \frac{1}{N}, \frac{2}{N}, \dots, \frac{N-1}{N}, 1\}$. Οι X, Y είναι τ.μ. με τιμές στο $\mathcal{A}_N$ και από κοινού συνάρτηση μάζας πιθανότητας

$$p_{x,y} := \mathbb{P}\big[X = x,\ Y = y\big] = C|x - y| \qquad \text{για } (x, y) \in \mathcal{A}_N \times \mathcal{A}_N.$$

α. Ποιες είναι η περιθώριες κατανομές τους;
β. Ποια είναι η $\mathbb{E}\big[X\big]$;
γ. Ποια είναι η πιθανότητα του ενδεχομένου $\{X > Y\}$;

Άσκηση 2 Οι X, Y είναι τυχαίες μεταβλητές με τιμές στο $\{-1, 1\}$ για τις οποίες έχουμε

$$\mathbb{P}\big[X = 1\big] = 1/4,\ \mathbb{P}\big[Y = 1|X = 1\big] = 2/3,\ \text{και } \mathbb{P}\big[Y = 1|X = -1\big] = 1/3.$$

Ποια είναι η πιθανότητα το τριώνυμο $P(z) = z^2 + Xz + Y$ να έχει πραγματικές ρίζες;

Άσκηση 3 Το (X, Y) είναι ένα τυχαίο διάνυσμα με σ.π.π.

$$f(x, y) = \begin{cases} 6x^{\alpha}y^{\alpha+1} & \text{για } (x, y) \in [0, 1] \times [0, 1] \\ 0 & \text{διαφορετικά.} \end{cases}$$

α. Υπολογίστε την σταθερά α.
β. Υπολογίστε την πιθανότητα των ενδεχομένων $\{X \leq 1/3\},\ \{Y > 2X\},\ \{X + Y \geq 1\}$.

Άσκηση 4 Το (X, Y) είναι ένα τυχαίο διάνυσμα με σ.π.π.

$$f(x, y) = \begin{cases} c(x + y) & \text{για } 0 \leq x \leq y \leq 1 \\ 0 & \text{διαφορετικά.} \end{cases}$$

α. Υπολογίστε την σταθερά c.
β. Υπολογίστε την περιθώρια κατανομή των X, Y.

Άσκηση 5 α) Αν οι τ.μ. X, Y είναι ανεξάρτητες, ισόνομες με συνεχή κατανομή, ποιά είναι η $\mathbb{P}\big[X > Y\big]$;
β) Γενικότερα, αν η από κοινού σ.π.π. των X, Y είναι συμμετρική, δηλαδή $f(x, y) = f(y, x),\ \forall x, y \in \mathbb{R}^2$ ποια είναι η $\mathbb{P}\big[X > Y\big]$;

Άσκηση 6 Αν X, Y είναι ανεξάρτητες τ.μ. με κατανομή Poisson και παραμέτρους λ, μ αντίστοιχα. Υπολογίστε την δεσμευμένη σ.μ.π. της X δεδομένου ότι $X + Y = n$, δηλαδή την $\mathbb{P}\big[X = k\ |X + Y = n\big]$ για $k = 0, \dots, n$.

Άσκηση 7 Αν οι X, Y είναι ανεξάρτητες, ισόνομες τυχαίες μεταβλητές με σ.κ.π. F, βρείτε την σ.κ.π. της $X \wedge Y = \min\{X, Y\}$, την σ.κ.π. της $X \vee Y = \max\{X, Y\}$ και την από κοινού σ.κ.π. των $X \vee Y$ και $X \wedge Y$.

Άσκηση 8 *Έστω $G = (V, E)$ ένας πεπερασμένος γράφος όπου V, E είναι τα σύνολα των κορυφών και των ακμών του αντίστοιχα. Βάφουμε κάθε κορυφή του γράφου κόκκινη ή μαύρη (ανεξάρτητα από τις άλλες) με πιθανότητα 1/2.
α. Δείξτε ότι ο αναμενόμενος αριθμός ακμών που τα άκρα τους έχουν διαφορετικά χρώματα είναι $\frac{1}{2}|E|$.
β. Χρησιμοποιώντας το προηγούμενο ερώτημα δείξτε ότι μπορούμε να διαμερίσουμε το σύνολο V σε δύο υποσύνολα έτσι ώστε τουλάχιστον οι μισές ακμές του γράφου να συνδέεουν κορυφές του ενός με κορυφές του άλλου.
Παρατηρήστε ότι το τελικό συμπέρασμα αφορά στη θεωρία γράφων και ότι δεν υπάρχει τίποτα τυχαίο στον ισχυρισμό του! Αυτό είναι ένα παράδειγμα χρήσης της "πιθανοθεωρητικής μεθόδου" (που επινοήθηκε από τον Paul Erdös) για την απόδειξη της ύπαρξης μιας ιδιότητας ανάμεσα στα μέλη μιας κλάσης. Αν σας ενδιαφέρει δείτε και το λήμμα *probabilistic method* στη Wikipedia.