

# ΘΕΩΡΙΑ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΩΝ & ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ

Σ.Η.Μ.Μ.Υ. ΧΕΙΜΕΡΙΝΟ ΕΞΑΜΗΝΟ 2012

ΦΥΛΛΑΔΙΟ ΑΣΚΗΣΕΩΝ V για την Παρασκευή 30/11/2012

**Άσκηση 1** Μια τ.μ.  $X$  έχει συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας

$$f(x) = \begin{cases} 0 & , x < 1 \\ cx^{-5} & , x \geq 1. \end{cases}$$

Υπολογίστε την σταθερά  $c$  και στη συνέχεια την πιθανότητα των ενδεχομένων  $\{X \in [3, 5]\}$  και  $\{X \geq t\}$ .

**Άσκηση 2** Αν η τ.μ.  $U$  ακολουθεί την ομοιόμορφη κατανομή στο  $[0,1]$  α) υπολογίστε την σ.κ.π. της τ.μ.  $X = -\ln(U)$ . Ποια γνωστή κατανομή ακολουθεί; β) ποια είναι η πυκνότητα πιθανότητας της τ.μ.  $Y = U^2$ ; γ) της  $Z = U^{-2}$ ;

**Άσκηση 3** Αν η τ.μ.  $X$  ακολουθεί κανονική κατανομή  $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$  εκφράστε την  $F(x) = \mathbb{P}[X \leq x | X \geq \mu]$  συναρτήσει της σ.κ.π.  $\Phi$  της τυπικής κανονικής κατανομής. Από τους πίνακες για την  $\Phi$  ή με τη βοήθεια του υπολογιστή βρείτε (συναρτήσει των  $\mu, \sigma$ ) το μικρότερο δυνατό  $x \in \mathbb{R}$  τέτοιο ώστε  $F(x) \geq 0.99$ .

**Άσκηση 4** Ένας δέκτης λαμβάνει ένα ημιτονοειδές σήμα. Θεωρητικά το ψηφίο 0 αντιστοιχεί σε πλάτος σήματος 2, ενώ το ψηφίο 1 σε πλάτος σήματος 6. Στην πράξη το πλάτος είναι μια τ.μ. με σ.π.π.  $f_0(x) = C_0(1 - \frac{|x-2|}{2})^+$  για το ψηφίο 0 και  $f_1(x) = C_1(1 - \frac{|x-6|}{3})^+$  για το ψηφίο 1. Ο δέκτης χρησιμοποιεί ένα κατώφλι πλάτους  $x \in (3, 4)$  και ταξινομεί το σήμα ως 0 αν το πλάτος είναι μικρότερο του  $x$  και ως 1 διαφορετικά.

α) Υπολογίστε τις σταθερές  $C_0$  και  $C_1$  και σχεδιάστε σε κοινό διάγραμμα τις γραφικές παραστάσεις των  $f_0, f_1$ .

β) Βρείτε την τιμή του  $x$  που ελαχιστοποιεί την πιθανότητα λάθους ταξινόμησης 1) αν τα δύο ψηφία είναι εξίσου συχνά, 2) αν γνωρίζουμε εκ των προτέρων ότι με πιθανότητα 90% το ψηφίο είναι 0.

**Άσκηση 5** Η διάρκεια ζωής ενός ανταλλακτικού σε ώρες είναι τ.μ.  $X$  με σ.π.π.

$$f(x) = Ce^{-\alpha x^{2/3}}, \quad x > 0.$$

α) Υπολογίστε την σταθερά  $C$ .

β) Υπολογίστε την αναμενόμενη διάρκεια ζωής του ανταλλακτικού.

**Άσκηση 6** Σε μια παρτίδα πόκερ κάθε παίκτης παίρνει αρχικά 5 φύλλα από τα 52 της τράπουλας. Λέμε ότι ένας παίκτης έχει καρέ αν έχει 4 ίδια φύλλα (ένα από κάθε κατηγορία), π.χ. 4 άσους, 4 δεκάρια κ.ο.κ. Ποιος είναι ο αναμενόμενος αριθμός των παρτίδων που πρέπει να παίξει κάποιος μέχρι να του μοιραστεί ένα καρέ; Ποια είναι προσεγγιστικά η πιθανότητα να μην πάρει κανένα καρέ σε τόσες παρτίδες; να πάρει τρία καρέ σε τόσες παρτίδες;

**Άσκηση 7** Η διάρκεια ζωής (σε ώρες) ενός προϊόντος είναι τ.μ. με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας

$$f(x) = \frac{1}{1200} e^{-\frac{x}{1200}}, \quad x > 0.$$

Κάθε μονάδα του προϊόντος έχει κόστος κατασκευής €5.000, πωλείται προς €7.000, και συνοδεύεται από εγγύηση για τη διάρκεια ζωής της. Συγκεκριμένα, αν αυτή είναι μικρότερη από 1000 ώρες το αντίτιμο της αγοράς επιστρέφεται στον αγοραστή, ενώ το προϊόν πωλείται προς €500 ως παλαιό υλικό.

α) Υπολογίστε το αναμενόμενο κέρδος ανά μονάδα προϊόντος.

β) Ποια διάρκεια ζωής πρέπει να προβλέπει η εγγύηση ώστε το αναμενόμενο κέρδος ανά μονάδα προϊόντος να είναι τουλάχιστον €800;

**Άσκηση 8** \* Ποιο είναι το αναμενόμενο πλήθος φορών που πρέπει να ριζούμε ένα ζάρι μέχρι να εμφανιστούν όλες οι όψεις του;