ΘΕΩΡΙΑ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΩΝ & ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ
Σ.Η.Μ.Μ.Υ. ΧΕΙΜΕΡΙΝΟ ΕΞΑΜΗΝΟ 2012
ΦΥΛΛΑΔΙΟ ΑΣΚΗΣΕΩΝ X για την Παρασκευή 18/1

Άσκηση 1 Η τ.μ. X έχει σ.π.π. $f(x) = \frac{1}{\pi}\frac{1}{1+x^2}$ (κατανομή Cauchy.) Βρείτε ποια κατανομή ακολουθεί η $1/X$.

Άσκηση 2 Οι X, Y είναι ανεξάρτητες τ.μ. με $X \sim \mathcal{N}(0,1)$ και $Y \sim \chi^2(n)$. Βρείτε την σ.π.π. της $\frac{X}{\sqrt{Y/n}}$.

Άσκηση 3 Ένας φοιτητής έχει να ετοιμάσει ένα φυλλάδιο ασκήσεων στις Πιθανότητες με 11 ασκήσεις και ένα στις Διαφορικές Εξισώσεις με 8. Οι χρόνοι που αφιερώνει ο φοιτητής στη λύση κάθε άσκησης είναι ανεξάρτητες ισόνομες τ.μ. με εκθετική κατανομή $\mathcal{E}xp(\lambda)$. Ποια κατανομή ακολουθεί το ποσοστό του χρόνου που ο φοιτητής αφιερώνει στο φυλλάδιο των πιθανοτήτων;

Άσκηση 4 Ο αριθμός των πελατών ανά 24ωρο σε μια ATM ακολουθεί κατανομή Poisson με μέση τιμή λ. Τα ποσά ανάληψης είναι ανεξάρτητες, ισόνομες τ.μ. με μέση τιμή μ και διασπορά σ^2. Βρείτε την μέση τιμή και τη διασπορά του συνολικού ποσού που αναλαμβάνεται από την ATM σε μια μέρα.

Άσκηση 5 Αν οι τ.μ. X, Y είναι ανεξάρτητες, με ομοιόμορφη κατανομή στο διάστημα [0,1] δείξτε ότι οι τ.μ.

$$U = \sqrt{-2\ln X}\cos(2\pi Y) \qquad V = \sqrt{-2\ln X}\sin(2\pi Y)$$

είναι ανεξάρτητες και ακολουθούν την τυπική κανονική κατανομή. Σ' αυτόν τον υπολογισμό βασίζεται η μέθοδος Box-Muller για την προσομοίωση κανονικών τ.μ. στον υπολογιστή. Βλέπετε πώς;

Άσκηση 6 Ας είναι X, Y ανεξάρτητες, ισόνομες τ.μ. με κατανομή $\mathcal{N}(0,2)$. Ορίζουμε $U = \frac{X+Y}{2}$, $V = \frac{X-Y}{2}$.
α) Ποια είναι η σ.π.π. του τυχαίου διανύσματος (X, Y);
β) Υπολογίστε την σ.π.π. του τυχαίου διανύσματος (U, V). Είναι οι τ.μ. U, V ανεξάρτητες;
γ) Έστω $S \sim \mathcal{N}(0,1)$ ανεξάρτητη από τις X, Y. Υπολογίστε την σ.π.π. του διανύσματος $(U, \sqrt{V^2+S^2})$.
δ) Θεωρούμε δύο ακόμα ανεξάρτητες τ.μ. Z, W με κατανομή $\mathcal{N}(0,2)$ και ανεξάρτητες από τις X, Y.
Αν $A = \begin{pmatrix} X & Z \\ W & Y \end{pmatrix}$, και $\Lambda_1 \geq \Lambda_2$ είναι οι ιδιοτιμές του συμμετρικού πίνακα $\frac{A+A^\top}{2}$ υπολογίστε την από κοινού κατανομή των Λ_1, Λ_2.

Άσκηση 7 Μια εταιρεία κινητής τηλεφωνίας παρέχει στους συνδρομητές της 270 λεπτά δωρεάν χρόνου ομιλίας σε κάθε περίοδο χρέωσης (30 ημέρες.) Η συνολική ημερήσια διάρκεια εξερχόμενων κλήσεων ενός συνδρομητή είναι τ.μ. που ακολουθεί κατανομή Poisson με παράμετρο $\lambda = 7,5$.
α) Υπολογίστε προσεγγιστικά την πιθανότητα p του ενδεχομένου ο συνδρομητής να ξεπεράσει το όριο του δωρεάν χρόνου ομιλίας σε μια περίοδο χρέωσης.
β) Έστω N εκείνη η περίοδος χρέωσης από την έναρξη του συμβολαίου του, κατά την οποία ο συνδρομητής θα ξεπεράσει για πρώτη φορά το όριο του δωρεάν χρόνου. Ποια κατανομή ακολουθεί η τ.μ. N; Ποιά είναι η αναμενόμενη τιμή της;

Άσκηση 8 Οι $X_1, \ldots, X_n$ είναι ανεξάρτητες, ισόνομες, τ.μ. με μέση τιμή μ και διασπορά σ^2. Υπολογίστε το όριο

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\big[\frac{X_1 + \cdots + X_n}{n} \leq \mu\big].$$

Χρησιμοποιήστε το παραπάνω αποτέλεσμα για να υπολογίστε το όριο $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1}{3^{3n}} \sum_{k=0}^{2n} \binom{3n}{k} 2^k.$

Άσκηση 9 200 αντιστάσεις είναι συνδεμένες σε σειρά. Η τιμή κάθε αντίστασης είναι μια τ.μ. με μέση τιμή 10 Ohm και τυπική απόκλιση 2 Ohm. Υπολογίστε προσεγγιστικά την πιθανότητα η συνολική αντίσταση να είναι τουλάχιστον 1,9 KOhm.

Άσκηση 10 Ένας παίκτης του μπάσκετ έχει πιθανότητα ευστοχίας 0,75 όταν εκτελεί ελεύθερες βολές και 0,005 όταν σουτάρει από το κέντρο με τα μάτια δεμένα. Αν εκτελέσει 100 βολές υπολογίστε προσεγγιστικά την πιθανότητα οι εύστοχες βολές να είναι μεταξύ 70 και 85. Αν σουτάρει 250 φορές από το κέντρο με δεμένα μάτια υπολογίστε προσεγγιστικά την πιθανότητα να ευστοχήσει σε τουλάχιστον 3 προσπάθειες.