ΘΕΩΡΙΑ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΩΝ & ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ

Σ.Η.Μ.Μ.Υ. ΧΕΙΜΕΡΙΝΟ ΕΞΑΜΗΝΟ 2012

ΦΥΛΛΑΔΙΟ ΑΣΚΗΣΕΩΝ Ι για την Παρασκευή 19/10/2012

Άσκηση 1 Στο παιχνίδι του μπριτζ τα 52 φύλλα της τράπουλας μοιράζονται (από 13) σε 4 παίκτες, N, S, E, W. Ας συμβολίζουμε με N_k το ενδεχόμενο ο παίκτης N να πάρει τουλάχιστον k άσους, και αντίστοιχα για τους άλλους παίκτες. Τι μπορούμε να πούμε για το πλήθος των άσων που έχει ο W σε κάθενα από τα παρακάτω ενδεχόμενα.

α) W_1^c,
β) $N_1 \cap S_2 \cap W_1$,
γ) $N_2 \cap S_2$,
δ) $(N_2 \cup S_2) \cap E_2$,
ε) $W_2 \setminus W_3$,
στ) $N_1^c \cap S_1^c \cap E_1^c$.

Άσκηση 2 Γράψτε τις 24 δυνατές διατάξεις των ψηφίων 1,2,3 και 4. Αν αποδώσουμε πιθανότητα $\frac{1}{24}$ σε καθεμία από αυτές και συμβολίσουμε με A_i το ενδεχόμενο το ψηφίο i να εμφανίζεται στη θέση i, υπολογίστε την πιθανότητα των ενδεχομένων $A_1, A_2, A_1 \cup A_2, A_1 \cap A_2$ και επαληθεύστε την ταυτότητα

$$\mathbb{P}\big[A_1 \cup A_2\big] = \mathbb{P}\big[A_1\big] + \mathbb{P}\big[A_2\big] - \mathbb{P}\big[A_1 \cap A_2\big].$$

Άσκηση 3 Θεωρήστε το χώρο πιθανότητας $\Omega = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} : a, b, c \in \{0, 1\} \right\}$. Αν

$$\mathbb{P}\left[\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \right] = K(a + b + c)$$

όπου K είναι μια σταθερά, υπολογίστε την Κ και στην συνέχεια την πιθανότητα του ενδεχομένου $A = \{P \in \Omega :$ ο P είναι αντιστρέψιμος$\}$.

Άσκηση 4 Δύο ενδεχόμενα A, B έχουν πιθανότητα $\frac{2}{3}$ και $\frac{1}{2}$ αντίστοιχα. Ποιά είναι η μικρότερη και η μεγαλύτερη τιμή που μπορεί να πάρει η $\mathbb{P}\big[A \cap B\big]$; Δώστε παραδείγματα χώρων πιθανότητας και ενδεχομένων A, B όπου η πιθανότητα της τομής λαμβάνει τη μικρότερη και τη μεγαλύτερη δυνατή τιμή.

Άσκηση 5 Τρεις παίκτες, Α,Β,Γ παίζουν σε ένα τουρνουά ταβλιού. Αρχικά παίζουν ο Α με τον Β και ο Γ κάθεται. Στη συνέχεια, ο νικητής κάθε παρτίδας παίζει με τον παίκτη που καθόταν στην προηγούμενη παρτίδα, ώσπου ένας παίκτης να κερδίσει δύο διαδοχικές παρτίδες, οπότε κερδίζει και το παιχνίδι.
α) Περιγράψτε τον χώρο των δυνατών εκβάσεων του παιχνιδιού.
β) Αν αποδώσουμε πιθανότητα $\frac{1}{2^k}$ σε κάθε έκβαση που το παιχνίδι διαρκεί k παρτίδες υπολογίστε την πιθανότητα νίκης κάθε παίκτη.

Άσκηση 6 Ένας μαθηματικός και ένας αριστοκράτης εμπλέκονται σε μια μονομαχία. Πυροβολούν εναλλάξ, με τον μαθηματικό να ξεκινά πρώτος, ώσπου ένας από τους δύο να χτυπηθεί. Αν κάθε φορά που πυροβολεί ο μαθηματικός η πιθανότητα ευστοχίας του είναι p και αντίστοιχα η πιθανότητα ευστοχίας για τον αριστοκράτη είναι q, υπολογίστε την πιθανότητα να βγει νικητής ο μαθηματικός.

Άσκηση 7 Ένα δοχείο έχει 10 κόκκινες και 5 μαύρες σφαίρες. Επιλέγουμε τυχαία μια σφαίρα, βλέπουμε το χρώμα της και την επιστρέφουμε στο δοχείο μαζί με άλλες 3 σφαίρες του ίδιου χρώματος. Στη συνέχεια επιλέγουμε ακόμη μια σφαίρα από το δοχείο.
α) Ποια είναι η πιθανότητα η δεύτερη σφαίρα να είναι κόκκινη;
β) Ποια είναι η πιθανότητα η πρώτη σφαίρα να ήταν κόκκινη αν η δεύτερη σφαίρα είναι μαύρη;

Άσκηση 8 Ένα ψηφιακό σύστημα επικοινωνίας αποτελείται από ένα πομπό και ένα δέκτη. Για τη μετάδοση ενός bit ο πομπός στέλνει ένα σήμα που αντιστοιχεί είτε στο ψηφίο 0 είτε στο ψηφίο 1. Ο δέκτης λαμβάνει το σήμα (παραμορφωμένο ενδεχομένως) και προσπαθεί να ερμηνεύσει το ψηφίο εκπομπής. Θεωρήστε τα παρακάτω ενδεχόμενα:
$\Pi_0 = \{$ο πομπός εκπέμπει $0\}$, $\Delta_0 = \{$ο δέκτης ερμηνεύει $0\}$,
$\Pi_1 = \{$ο πομπός εκπέμπει $1\}$, $\Delta_1 = \{$ο δέκτης ερμηνεύει $1\}$.
Υποθέτουμε ότι $\mathbb{P}\big[\Pi_0\big] = \frac{4}{5}$, $\mathbb{P}\big[\Delta_0 \,\big|\Pi_0\big] = \frac{99}{100}$, και $\mathbb{P}\big[\Delta_1 \,\big|\Pi_1\big] = \frac{97}{100}$.
α) Ποια είναι η πιθανότητα να συμβεί σφάλμα κατά τη μετάδοση;
β) Ποιά είναι η πιθανότητα να έχει συμβεί σφάλμα, αν ο δέκτης έχει ερμηνεύσει το ψηφίο μετάδοσης ως 1;

Άσκηση 9 * Ο παίκτης Α στρίβει ν φορές ένα (δίκαιο) νόμισμα και ο παίκτης Β στρίβει το ίδιο νόμισμα $\nu + 1$ φορές. Ποια είναι η πιθανότητα ο Β να φέρει αυστηρά περισσότερες φορές γράμματα απ΄ όσες ο Α;