ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΚΑΙ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ Η/Υ

ΘΕΩΡΙΑ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΩΝ & ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ

Παρασκευή 30 Αυγούστου 2013 - Επαναληπτική Εξεταστική

Άσκηση 1 (25 μονάδες)
Ένας σπουδαστής παίρνει μέρος σε μια εξέταση που διενεργείται ως εξής: ένα κουτί περιέχει 10 ερωτήσεις, 7 από τις οποίες είναι από το κεφάλαιο 1 και 3 από το κεφάλαιο 2. Ο σπουδαστής επιλέγει τυχαία 2 από τις 10 ερωτήσεις και επιτυγχάνει στην εξέταση αν απαντήσει σωστά και στις δύο. Ο σπουδαστής έχει μελετήσει κυρίως το κεφάλαιο 1, και εκτιμάται ότι θα απαντήσει σωστά σε μια ερώτηση με πιθανότητα 80% αν αυτή είναι από το κεφάλαιο 1 και με πιθανότητα 30% αν αυτή είναι από το κεφάλαιο 2.
α) Ποια η πιθανότητα να επιτύχει στην εξέταση;
β) Δεδομένου ότι πέτυχε στην εξέταση, ποια η πιθανότητα να επέλεξε 2 ερωτήσεις από το κεφάλαιο 1;
γ) Ανάμεσα σε 231 σπουδαστές με αυτήν την προετοιμασία ποια η πιθανότητα να επιτύχουν τουλάχιστον 100;

Άσκηση 2 (25 μονάδες)
Έστω $\{X_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ ακολουθία από ανεξάρτητες, ισόνομες τυχαίες μεταβλητές με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας (σ.π.π.) που δίνεται από την $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$ για $x > 0$, όπου λ είναι μια άγνωστη θετική παράμετρος.
α) Βρείτε την συνάρτηση κατανομής $F(x) = \mathbb{P}\big[X_i \le x\big]$ των X_i.
β) Αν $M_n = \max\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$, και G είναι η συνάρτηση κατανομής της τ.μ. M_n, δείξτε ότι

$$G(x) = (1 - e^{-\lambda x})^n \quad \text{για } x > 0, \text{ και 0 διαφορετικά.}$$

γ) Υπολογίστε την σ.π.π. της M_n.
δ) Αν η μόνη πληροφορία που έχουμε για τις $X_1, X_2, \ldots, X_n$ είναι η M_n, βρείτε την εκτιμήτρια $\hat{\lambda}_n$ της παραμέτρου λ με την μέθοδο της μέγιστης πιθανοφάνειας.
ε) Με την βοήθεια της στοιχειώδους ανισότητας $(1+x)^n \ge 1 + nx$ για κάθε $x \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N}$, ή με οποιοδήποτε άλλο τρόπο, δείξτε ότι για κάθε $\epsilon > 0$ έχουμε $\mathbb{P}\big[\,|\hat{\lambda}_n - \lambda| > \epsilon\big] \longrightarrow 0 \quad$ καθώς $n \to \infty$.

Άσκηση 3 (25 μονάδες)
Η απόδοση ανά ώρα ενός νέου μηχανήματος κατασκευής χάλκινων καλωδίων είναι τ.μ. X [km] με κατανομή $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$. Είκοσι ωριαίες αποδόσεις καταγράφηκαν και έδωσαν δειγματική μέση τιμή $\bar{x} = 9,8$ [km], και δειγματική διασπορά $s^2 = 1,095$ [km^2]. Με βάση αυτά τα δεδομένα δώστε
α) ένα διάστημα εμπιστοσύνης (δ.ε.) της μ με βαθμό εμπιστοσύνης $\gamma = 0,98$, και
β) ένα δ.ε. της σ^2 με βαθμό εμπιστοσύνης $\gamma = 0,90$.

Άσκηση 4 (25 μονάδες)
Θεωρούμε ένα μοντέλο σύμφωνα με το οποίο το ύψος Y μιας γυναίκας και το ύψος X της μητέρας της είναι τυχαίες μεταβλητές, και το ζεύγος (X, Y) ακολουθεί διδιάστατη κανονική κατανομή. Οι περιθώριες κατανομές τους είναι $X \sim \mathcal{N}(\mu_1, \sigma^2)$ και $Y \sim \mathcal{N}(\mu_2, \sigma^2)$, ενώ ο συντελεστής συσχέτισής τους είναι ρ. Έστω $W = Y - \rho X$.
α) Εξηγήστε γιατί το ζεύγος (X, W) ακολουθεί διδιάστατη κανονική κατανομή χωρίς να γράψετε την σ.π.π. του.
β) Υπολογίστε τις συνδιακυμάνσεις $\mathrm{Cov}(X, W)$ και $\mathrm{Cov}(W, W)$.
γ) Υπολογίστε τώρα την σ.π.π. του ζεύγους (X, W) συναρτήσει των παραμέτρων $\mu_1, \mu_2, \sigma^2, \rho$ του μοντέλου.
δ) Χρησιμοποιώντας τον γραμμικό μετασχηματισμό $(X, Y) = (X, W + \rho X)$ δείξτε ότι η δεσμευμένη σ.π.π. της Y δεδομένης της X δίνεται από την $f_{Y|X}(y|x) = f_W(y - \rho x)$.
ε) Ποιο είναι το μικρότερο ύψος x που πρέπει να έχει μια γυναίκα ώστε να ξεπερνά το αναμενόμενο ύψος της κόρης της, δηλ. $\mathbb{E}\big[Y|X = x\big] < x$;
(*Υπόμνηση:* Ο συντελεστής συσχέτισης $\rho_{X,Y}$ δύο τ.μ. X, Y δίνεται από την $\rho_{X,Y} = \frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sqrt{\mathrm{Var}(X)\mathrm{Var}(Y)}}$.)

Διάρκεια εξέτασης 2 ώρες και 30 λεπτά

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!