ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΚΑΙ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ Η/Υ

ΘΕΩΡΙΑ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΩΝ & ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ

Πέμπτη 21 Φεβρουαρίου 2013

Άσκηση 1 (25 μονάδες)
Ένας τύπος τρανζίστορ έχει συντελεστή β που είναι τυχαία μεταβλητή (τ.μ.) με κανονική κατανομή $\mathcal{N}(\mu = 90,\ \sigma^2 = 15)$ αν προέρχεται από την εταιρεία Α, ή κανονική κατανομή $\mathcal{N}(\mu = 97,\ \sigma^2 = 35)$ αν προέρχεται από την εταιρεία Β. Ένα κύκλωμα που χρησιμοποιεί ένα (1) τέτοιου τύπου τρανζίστορ, απαιτεί για την ορθή λειτουργία του ο συντελεστής β να υπερβαίνει το 85. Εσείς κατασκευάζετε τέτοια κυκλώματα και χρησιμοποιείτε αδιακρίτως και τυχαία τρανζίστορ από τις εταιρείες Α ή Β σε ποσοστά 40% και 60% αντίστοιχα.
α) Ποια είναι η πιθανότητα ένα τρανζίστορ προέλευσης Α να έχει $\beta > 85$; Ποια είναι αυτή η πιθανότητα για τρανζίστορ προέλευσης Β;
β) Ποια είναι η πιθανότητα p ώστε τυχόν κύκλωμα παραγωγής σας να λειτουργεί σωστά σε ό,τι αφορά το χρησιμοποιούμενο τρανζίστορ;
γ) Αν ένα κύκλωμα λειτουργεί σωστά ποια είναι η πιθανότητα να περιέχει τρανζίστορ προέλευσης Α;
δ) Σε μια παρτίδα από 30 τέτοια κυκλώματα ποια είναι προσεγγιστικά η πιθανότητα να υπάρχουν το πολύ 3 ελαττωματικά;
ε) Σε μια παρτίδα από 1000 τέτοια κυκλώματα ποια είναι προσεγγιστικά η πιθανότητα να υπάρχουν το πολύ 60 ελαττωματικά;

Άσκηση 2 (20 μονάδες)
Σε ένα εργοστάσιο η ημερήσια κατανάλωση ρεύματος (σε kWh) είναι τ.μ. με κανονική κατανομή $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$. Παρατηρήσεις 20 ημερών έδωσαν δειγματική μέση κατανάλωση $\bar{x} = 82,3$kWh και δειγματική τυπική απόκλιση $s = 20$kWh. Βρείτε
α) ένα διάστημα εμπιστοσύνης για την άγνωστη παράμετρο μ με βαθμό εμπιστοσύνης $\gamma_1 = 0,95$ και
β) ένα διάστημα εμπιστοσύνης για την άγνωστη παράμετρο σ^2 με βαθμό εμπιστοσύνης $\gamma_2 = 0,9$.

Άσκηση 3 (25 μονάδες)
Οι $X_1, X_2, \ldots, X_n$ είναι ανεξάρτητες, ισόνομες, μη αρνητικές τυχαίες μεταβλητές με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας (σ.π.π.)

$$f(x) = \frac{1}{6\beta^4} x^3 e^{-\frac{x}{\beta}}, \quad x > 0,$$

όπου β είναι μια άγνωστη θετική παράμετρος.
α) Βρείτε την εκτιμήτρια μέγιστης πιθανοφάνειας (Ε.Μ.Π.) $\hat{\beta}$ της παραμέτρου β.
β) Είναι η $\hat{\beta}$ αμερόληπτη εκτιμήτρια;
γ) Βρείτε την Ε.Μ.Π. $\hat{\alpha}$ της παραμέτρου $1/\beta$.
δ) Είναι η $\hat{\alpha}$ αμερόληπτη εκτιμήτρια;

Άσκηση 4 (30 μονάδες)
Οι $U_1, U_2, \ldots, U_n$ είναι ανεξάρτητες ισόνομες τ.μ. με ομοιόμορφη κατανομή στο διάστημα [0,1]. Ορίζουμε $Y_n = \min\{U_1, U_2, \ldots, U_n\}$.
α) Υπολογίστε την πιθανότητα $\mathbb{P}[Y_n > t]$ για $t \in [0,1]$.
β) Υπολογίστε την σ.π.π. της Y_n.
γ) Υπολογίστε την $\mathbb{E}[Y_n]$.
δ) Αν $X \sim \mathcal{E}xp(1)$ (η σ.π.π. $f_X(x) = e^{-x}$ για $x > 0$ και 0 διαφορετικά) ποια κατανομή ακολουθεί η τ.μ. e^{-X};
ε) Αν οι $X_1, X_2, \ldots, X_n$ είναι ανεξάρτητες, ισόνομες τ.μ. με κατανομή $\mathcal{E}xp(1)$ και $M_n = \max\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$ υπολογίστε την αναμενόμενη τιμή

$$\mathbb{E}\left[\ln\left(1 - e^{-M_n}\right)\right].$$

Διάρκεια εξέτασης 2 ώρες και 30 λεπτά

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!