ΘΕΩΡΙΑ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΩΝ & ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ

Άσκηση 1 (25 μονάδες)

Ο ημερήσιος αριθμός παραγγελιών που δέχεται μια εταιρεία είναι τυχαία μεταβλητή (τ.μ.) με μέση τιμή 10 και τυπική απόκλιση 3, ενώ για διαφορετικές ημέρες οι τ.μ. αυτές είναι ανεξάρτητες.

α) Εκτιμήστε την πιθανότητα του ενδεχομένου ο αριθμός των παραγγελιών σε ένα μήνα (30 ημέρες) να υπερβεί τις 320.

β) Ποια είναι κατά προσέγγιση η πιθανότητα του ενδεχομένου σε τουλάχιστον 5 από τους επόμενους 30 μήνες ο αριθμός των παραγγελιών να υπερβεί τις 320;

Άσκηση 2 (20 μονάδες)

Η τ.μ. X ακολουθεί κατανομή $\chi^2(4)$, ενώ η δεσμευμένη κατανομή της τ.μ. Y με δεδομένη την X είναι ομοιόμορφη στο $[0, X]$, δηλαδή $f_{Y|X}(y|x) = \frac{1}{x}$ για $y \in (0, x)$, και 0 διαφορετικά.

α) Δείξτε ότι οι τ.μ. $Y, X - Y$ είναι ανεξάρτητες, ισόνομες και ακολουθούν κατανομή $\chi^2(2)$.

β) Υπολογίστε την πιθανότητα των ενδεχομένων $\{Y > 1\}$ και $\{X > 2Y\}$.

Άσκηση 3 (25 μονάδες)

Ο συντελεστής κέρδους ενός τύπου transistor είναι κανονική τ.μ. $X_1 \sim \mathcal{N}(\mu_1, \sigma_1^2)$ αν προέρχεται από τον κατασκευαστή Α και κανονική τ.μ. $X_2 \sim \mathcal{N}(\mu_2, \sigma_2^2)$, αν προέρχεται από τον κατασκευαστή Β. Δείγμα μεγέθους $n_1 = 10$ από τον κατασκευαστή Α έδωσε δειγματικό μέσο $\bar{x}_1 = 320$ και δειγματική τυπική απόκλιση $\bar{s}_1 = 30$. Δείγμα μεγέθους $n_2 = 15$ από τον κατασκευαστή Β έδωσε αντίστοιχα $\bar{x}_2 = 290$ και $\bar{s}_2 = 25$.

α) Βρείτε ένα 0,98-διάστημα εμπιστοσύνης (δ.ε.) για τον λόγο $\frac{\sigma_1}{\sigma_2}$.

β) Βρείτε ένα 0,95-δ.ε. για την διαφορά $\mu_1 - \mu_2$, υποθέτοντας ότι $\sigma_1 = \sigma_2$.

Άσκηση 4 (30 μονάδες)

N γρίφοι βρίσκονται αναρτημένοι σε μια ιστοσελίδα. Καθένας από τους m αναγνώστες της σελίδας επιλέγει τυχαία και ανεξάρτητα από τους άλλους έναν από τους N γρίφους και προσπαθεί να τον λύσει, με πιθανότητα να τα καταφέρει $p > 0$.

α) Αν G_j είναι το ενδεχόμενο ο γρίφος j να μείνει άλυτος δείξτε ότι $\mathbb{P}[G_j] = \left(1 - \frac{p}{N}\right)^m$.

β) Με δεδομένο ότι ο γρίφος j έμεινε άλυτος, ποια είναι η πιθανότητα να μην τον δοκίμασε κανείς αναγνώστης;

γ) Αν $j \neq k$ δείξτε ότι $\mathbb{P}[G_j \cap G_k] = \left(1 - \frac{2p}{N}\right)^m$.

δ) Υπολογίστε τη συνδιακύμανση των τ.μ. $\mathbb{1}_{G_j}$ και $\mathbb{1}_{G_k}$ για $j \neq k$, και δείξτε ότι είναι μικρότερη του 0.

ε) Έστω $X = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} \mathbb{1}_{G_j}$ η τ.μ. που παριστάνει το κλάσμα των γρίφων που παρέμειναν άλυτοι. Υπολογίστε την αναμενόμενη τιμή της $\mathbb{E}[X]$, και τη διασπορά της $\mathrm{Var}(X)$.

στ) Δείξτε ότι αν $m, N \to \infty$ έτσι ώστε $m/N \to \gamma \in \mathbb{R}$ τότε για κάθε $\varepsilon > 0$

$$\mathbb{P}\Big[\big|X - e^{-p\gamma}\big| > \varepsilon\Big] \longrightarrow 0.$$

Υπομνήσεις

1. Αν $n \to \infty$, $p \to 0$ έτσι ώστε $np \to \lambda \in \mathbb{R}$, τότε $\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k} \to e^{-\lambda}\,\frac{\lambda^k}{k!}$, $\forall k \in \mathbb{N}$.
2. $\chi^2(n) = G\left(\frac{1}{2}, \frac{n}{2}\right)$, όπου η σ.π.π. της $G(\alpha, p)$ είναι $f(x) = \frac{\alpha^p}{\Gamma(p)} x^{p-1} e^{-\alpha x}$.
3. Η δείκτρια συνάρτηση $\mathbb{1}_A$ ενός ενδεχομένου A ορίζεται ως $\mathbb{1}_A(\omega) = 1$ αν $\omega \in A$, και $\mathbb{1}_A(\omega) = 0$ αν $\omega \notin A$.

Διάρκεια εξέτασης 2 ώρες και 30 λεπτά

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!