



Εξεταστική Φεβρουαρίου 2012

ΘΕΩΡΙΑ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΩΝ & ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ

**Άσκηση 1** Ο χρόνος αναμονής (σε  $\mu\text{sec}$ ) για εξυπηρέτηση από ένα λειτουργικό εξυπηρετητή είναι μια τυχαία μεταβλητή (τ.μ.)  $T$  με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας (σ.π.π.)

$$f(x) = \begin{cases} c 2^{-x} & , x > 0 \\ 0 & , x \leq 0 \end{cases}$$

όπου  $c > 0$ .

- Υπολογίστε την τιμή της σταθεράς  $c$  και την πιθανότητα  $\mathbb{P}[T > 5]$ .
- Υπολογίστε την αναμενόμενη τιμή  $\mathbb{E}[T]$ , και τη διασπορά  $V(T)$  της τ.μ.  $T$ .
- Σε ένα κέντρο υπάρχουν 5 εξυπηρετητές, από τους οποίους 4 είναι λειτουργικοί. Αν ένας χρήστης ανατίθεται τυχαία σε κάποιον από τους 5 εξυπηρετητές, ποια είναι η πιθανότητα ο χρόνος αναμονής του να ξεπεράσει τα 5  $\mu\text{sec}$ ;
- Δεδομένου ότι ένας χρήστης δεν έχει εξυπηρετηθεί μετά από 5  $\mu\text{sec}$ , ποια είναι πιθανότητα να έχει ανατεθεί στον εξυπηρετητή που είναι εκτός λειτουργίας;

**Άσκηση 2** Μια εταιρεία κινητής τηλεφωνίας παρέχει στους συνδρομητές της 270 λεπτά δωρεάν χρόνου ομιλίας σε κάθε περίοδο χρέωσης (30 ημέρες.) Η συνολική ημερήσια διάρκεια εξερχόμενων κλήσεων ενός συνδρομητή είναι τ.μ. που ακολουθεί κατανομή Poisson με παράμετρο  $\lambda = 7,5$ .

- Υπολογίστε προσεγγιστικά την πιθανότητα  $p$  του ενδεχομένου ο συνδρομητής να ξεπεράσει το όριο του δωρεάν χρόνου ομιλίας σε μια περίοδο χρέωσης.
- Έστω  $N$  εκείνη η περίοδος χρέωσης από την έναρξη του συμβολαίου του, κατά την οποία ο συνδρομητής θα ξεπεράσει για πρώτη φορά το όριο του δωρεάν χρόνου. Ποια κατανομή ακολουθεί η τ.μ.  $N$ ; Ποιά είναι η αναμενόμενη τιμή της;

**Άσκηση 3** Θεωρήστε την σ.π.π.  $f(x|\theta) = \begin{cases} \frac{\theta}{x^{\theta+1}} & , x > 1 \\ 0 & , x \leq 1 \end{cases}$  όπου  $\theta > 0$  είναι μια άγνωστη παράμετρος.

- Αν  $(X_1, \dots, X_n)$  είναι ένα τυχαίο δείγμα από την  $f$ , υπολογίστε την εκτιμήτρια μέγιστης πιθανοφάνειας της  $\theta$ .
- Ποια κατανομή ακολουθούν οι τ.μ.  $Y_i = 2\theta \ln X_i$ ;
- Ποια κατανομή ακολουθεί η τ.μ.  $Z = 2\theta \ln (\prod_{i=1}^n X_i)$ ;
- Αν  $(X_1, \dots, X_{10})$  είναι ένα τυχαίο δείγμα από την  $f$  βρείτε ένα 0,95-διάστημα εμπιστοσύνης για τη  $\theta$ .

**Άσκηση 4** Ας είναι  $X, Y$  ανεξάρτητες, ισόνομες τ.μ. με κατανομή  $\mathcal{N}(0, 2)$ . Ορίζουμε  $U = \frac{X+Y}{2}$ ,  $V = \frac{X-Y}{2}$ .

- Ποια είναι η σ.π.π. του τυχαίου διανύσματος  $(X, Y)$ ;
- Υπολογίστε την σ.π.π. του τυχαίου διανύσματος  $(U, V)$ . Είναι οι τ.μ.  $U, V$  ανεξάρτητες;
- Έστω  $S \sim \mathcal{N}(0, 1)$  ανεξάρτητη από τις  $X, Y$ . Υπολογίστε την σ.π.π. του διανύσματος  $(U, \sqrt{V^2 + S^2})$ .
- Θεωρούμε δύο ακόμα ανεξάρτητες τ.μ.  $Z, W$  με κατανομή  $\mathcal{N}(0, 2)$  και ανεξάρτητες από τις  $X, Y$ .

Αν  $A = \begin{pmatrix} X & Z \\ W & Y \end{pmatrix}$ , και  $\Lambda_1 \geq \Lambda_2$  είναι οι ιδιοτιμές του συμμετρικού πίνακα  $\frac{A+A^T}{2}$  υπολογίστε την από κοινού κατανομή των  $\Lambda_1, \Lambda_2$ .

**Υπόμνηση:**  $\chi^2(n) = G(\frac{1}{2}, \frac{n}{2})$ , όπου η σ.π.π. της  $G(\alpha, p)$  είναι  $f(x) = \frac{\alpha^p}{\Gamma(p)} x^{p-1} e^{-\alpha x}$ .

Διάρκεια εξέτασης 2 ώρες και 30 λεπτά

**ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!**