# ΘΕΩΡΙΑ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΩΝ & ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ

**Σ.Η.Μ.Μ.Υ. ΧΕΙΜΕΡΙΝΟ ΕΞΑΜΗΝΟ 2011**

ΦΥΛΛΑΔΙΟ ΑΣΚΗΣΕΩΝ IX για την Παρασκευή 10/2

**Άσκηση 1** Η τ.μ. $X$ έχει σ.π.π. $f(x) = \frac{1}{\pi}\frac{1}{1+x^2}$ (κατανομή Cauchy.) Βρείτε ποια κατανομή ακολουθεί η $1/X$.

**Άσκηση 2** Οι $X, Y$ είναι ανεξάρτητες τ.μ. με $X \sim \mathcal{N}(0,1)$ και $Y \sim \chi^2(n)$. Βρείτε την σ.π.π. της $\frac{X}{\sqrt{Y/n}}$.

**Άσκηση 3** Ένας φοιτητής έχει να ετοιμάσει ένα φυλλάδιο ασκήσεων στις Πιθανότητες με 11 ασκήσεις και ένα στις Διαφορικές Εξισώσεις με 8. Οι χρόνοι που αφιερώνει ο φοιτητής στη λύση κάθε άσκησης είναι ανεξάρτητες ισόνομες τ.μ. με εκθετική κατανομή $\mathcal{E}xp(\lambda)$. Ποια κατανομή ακολουθεί το ποσοστό του χρόνου που ο φοιτητής αφιερώνει στο φυλλάδιο των πιθανοτήτων;

**Άσκηση 4** Ο αριθμός των πελατών ανά 24ωρο σε μια ATM ακολουθεί κατανομή Poisson με μέση τιμή $\lambda$. Τα ποσά ανάληψης είναι ανεξάρτητες, ισόνομες τ.μ. με μέση τιμή $\mu$ και διασπορά $\sigma^2$. Βρείτε την μέση τιμή και τη διασπορά του συνολικού ποσού που αναλαμβάνεται από την ATM σε μια μέρα.

**Άσκηση 5** Οι $X_1, X_2, \ldots, X_n$ είναι ανεξάρτητες ισόνομες τ.μ. με κατανομή $\mathcal{N}(0,\sigma^2)$. Ορίζουμε $\bar{X} = \frac{X_1+\cdots+X_n}{n}$. Δείξτε ότι η $\bar{X}$ είναι ανεξάρτητη από τις $X_i - \bar{X}$. Ποια είναι η δεσμευμένη σ.π.π. $f_{X_1|\bar{X}}(x\,|\,\mu)$;

**Άσκηση 6** Δείξτε ότι αν το τυχαίο διάνυσμα $(X,Y) \in \mathbb{R}^2$ ακολουθεί τυπική κατανομή τότε και το διάνυσμα

$$\begin{pmatrix} X' \\ Y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$$

ομοίως ακολουθεί τυπική κανονική κατανομή. Δηλαδή η $\mathcal{N}(\mathbf{0}, \mathbb{I}_2)$ μένει αναλλοίωτη από στροφές.

**Άσκηση 7** Οι στοχαστικές διαδικασίες είναι τυχαίες συναρτήσεις, και ένας τρόπος να τις φανταστεί κανείς είναι ότι η τιμή τους κάθε χρονική στιγμή είναι μια τυχαία μεταβλητή. Η κίνηση Brown είναι μια στοχαστική διαδικασία όπου $B_t \sim \mathcal{N}(0,t)$. Αυτό δεν καθορίζει πλήρως την κίνηση Brown αφού την ίδια ιδιότητα έχει και η διαδικασία $Y_t = \sqrt{t}\chi$ όπου $\chi \sim \mathcal{N}(0,1)$ και $t \geq 0$. Χρειάζεται να καθορίσουμε και το πώς σχετίζονται μεταξύ τους οι τιμές της διαδικασίας σε διαφορετικούς χρόνους, πώς εξελίσσεται δηλαδή η διαδικασία στο χρόνο. Ο τρόπος που αυτό συμβαίνει για την κίνηση Brown είναι ότι για κάθε $s, t \in \mathbb{R}_+$ με $s < t$ η μεταβολή της $B_t - B_s$ είναι ανεξάρτητη από το παρελθόν της, είναι δηλαδή ανεξάρτητη από τις τ.μ. $B_r$ με $r \leq s$ με κατανομή $\mathcal{N}(0, t-s)$. Αν $r < s < t$ βρείτε την από κοινού κατανομή των $B_r, B_s, B_t$ και την δεσμευμένη σ.π.π. της $B_s$ δεδομένων των $B_r, B_t$.

**Άσκηση 8** Οι $X_1, \ldots, X_n$ είναι ανεξάρτητες, ισόνομες, τ.μ. με μέση τιμή $\mu$ και διασπορά $\sigma^2$. Υπολογίστε το όριο

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\big[\frac{X_1+\cdots+X_n}{n} \leq \mu\big].$$

Χρησιμοποιήστε το παραπάνω αποτέλεσμα για να υπολογίστε το όριο $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1}{3^{3n}} \sum_{k=0}^{2n} \binom{3n}{k} 2^k.$

**Άσκηση 9** 200 αντιστάσεις είναι συνδεμένες σε σειρά. Η τιμή κάθε αντίστασης είναι μια τ.μ. με μέση τιμή 10 Ohm και τυπική απόκλιση 2 Ohm. Υπολογίστε προσεγγιστικά την πιθανότητα η συνολική αντίσταση να είναι τουλάχιστον 1,9 KOhm.

**Άσκηση 10** Ένας παίκτης του μπάσκετ έχει πιθανότητα ευστοχίας 0,75 όταν εκτελεί ελεύθερες βολές και 0,005 όταν σουτάρει από το κέντρο με τα μάτια δεμένα. Αν εκτελέσει 100 βολές υπολογίστε προσεγγιστικά την πιθανότητα οι εύστοχες βολές να είναι μεταξύ 70 και 85. Αν σουτάρει 250 φορές από το κέντρο με δεμένα μάτια υπολογίστε προσεγγιστικά την πιθανότητα να ευστοχήσει σε τουλάχιστον 3 προσπάθειες.

**Άσκηση 11** *Οι $X, Y$ είναι ανεξάρτητες, ισόνομες τ.μ. με σ.π.π. $f(x) = \frac{1}{\pi}\frac{1}{1+x^2}$. Δείξτε ότι οι $Z = \frac{X+Y}{2}$ και $W = \frac{X+Y}{2XY}$ ακολουθούν την ίδια κατανομή όπως οι $X, Y$. Υπόδειξη: Ίσως βρείτε χρήσιμο να γράψετε

$$\frac{1}{1+(x+y)^2} \times \frac{1}{1+(x-y)^2} = \frac{A(y)+B(y)(x+y)}{1+(x+y)^2} + \frac{C(y)+D(y)(x-y)}{1+(x-y)^2}.$$