

# ΘΕΩΡΙΑ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΩΝ & ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ

Σ.Η.Μ.Μ.Υ. ΧΕΙΜΕΡΙΝΟ ΕΞΑΜΗΝΟ 2011

ΦΥΛΛΑΔΙΟ ΑΣΚΗΣΕΩΝ VIII για την Παρασκευή 20/1/2012

**Άσκηση 1** Αν οι  $X, Y$  είναι ανεξάρτητες, ισόνομες τ.μ. με πεπερασμένη διασπορά, υπολογίστε την συνδιακύμανση των τ.μ.  $U = \alpha X + \beta Y$  και  $V = \beta X - \alpha Y$  για  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ .

**Άσκηση 2** Θεωρήστε  $X, Y, Z$  τ.μ. ορισμένες στον ίδιο χώρο πιθανότητας με  $\mathbb{E}[X^2], \mathbb{E}[Y^2] < \infty$ ,  $\text{Cov}(X, Y) = 1$ ,  $Z \sim \mathcal{N}(0, 1)$  και  $Z$  ανεξάρτητη από τις  $X, Y$ . Υπολογίστε την  $\text{Cov}(XZ^2, Y + Z)$ .

**Άσκηση 3** Έστω  $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  ακολουθία από ανεξάρτητες ισόνομες τ.μ. με μέση τιμή 1 και διασπορά 1/4. Αν  $Y = \sum_{i=1}^n \frac{X_i}{2^i}$  υπολογίστε τις σταθερές  $a_n, b_n$  έτσι ώστε η  $a_n + b_n Y$  να έχει μέση τιμή 0 και διασπορά 1.

**Άσκηση 4** Έχετε γράψει  $n$  διαφορετικές χριστουγεννιάτικες κάρτες σε φίλους σας και  $n$  φακέλους με τις διευθύνσεις τους. Ανακατεύετε τους φακέλους και βάζετε μέσα σε καθέναν μια κάρτα στην τύχη. Θέτουμε  $X_i = 0$  ή 1, ανάλογα αν η  $i$ -στή κάρτα τοποθετήθηκε στο σωστό φάκελο και  $Y$  το πλήθος των καρτών που τοποθετήθηκαν στο σωστό φάκελο.

α) Υπολογίστε την συνδιακύμανση των  $X_i, X_j$  και σχολιάστε το πρόσημό της.

β) Υπολογίστε την μέση τιμή και την διασπορά της  $Y$ .

**Άσκηση 5** Οι  $X, Y$  είναι τυχαίες μεταβλητές με τιμές στο  $\{-1, 1\}$  για τις οποίες έχουμε

$$\mathbb{P}[X = 1] = 1/4, \quad \mathbb{P}[Y = 1|X = 1] = 2/3, \quad \text{και} \quad \mathbb{P}[Y = 1|X = -1] = 1/3.$$

Ποια είναι η πιθανότητα το τριώνυμο  $P(z) = z^2 + Xz + Y$  να έχει πραγματικές ρίζες;

**Άσκηση 6** Οι τ.μ.  $X, Y$  έχουν από κοινού σ.π.π.  $f(x, y) = \frac{1}{y}$  για  $0 < x < y < 1$  και 0 διαφορετικά.

α) Υπολογίστε την δεσμευμένη σ.π.π. της  $Y$  δεδομένου ότι  $X = x$ .

β) Υπολογίστε την  $\mathbb{P}[X + Y > 1/2]$ .

**Άσκηση 7** Η από κοινού σ.π.π. των  $X, Y$  είναι

$$f(x, y) = cy^\beta(1-x)^\alpha, \quad 0 < y < x < 1,$$

όπου  $\alpha, \beta > -1$ . Να υπολογίσετε

α) Τις περιθώριες σ.π.π. των  $X, Y$

β) Τις δεσμευμένες σ.π.π.  $f_{X|Y}$  και  $f_{Y|X}$ .

γ) Τις δεσμευμένες μέσες τιμές  $\mathbb{E}[X|Y = y]$  και  $\mathbb{E}[Y|X = x]$

**Άσκηση 8** Αν η τ.μ.  $P$  ακολουθεί ομοιόμορφη κατανομή στο  $[0, 1]$  και η δεσμευμένη κατανομή της  $X$  δεδομένου ότι  $P = p$  είναι διωνυμική  $b(n, p)$  υπολογίστε την (περιθώρια) κατανομή της  $X$ .

**Άσκηση 9** \*Οι  $X, Y$  είναι ανεξάρτητες τ.μ. με τιμές στο  $\mathbb{N}$  και σ.μ.π.  $p_n = \frac{1}{\zeta(s)n^s}$  για κάποιο  $s > 1$ , όπου  $\zeta(\cdot)$  είναι η συνάρτηση του Riemann

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}.$$

α) Δείξτε ότι αν  $2 = p_1 < p_2 < \dots$  είναι η ακολουθία των πρώτων αριθμών τότε τα ενδεχόμενα  $E_i = \{p_i/X\}$  είναι ανεξάρτητα.

β) Εξηγήστε γιατί έχουμε  $\bigcap_i E_i^c = \{X = 1\}$  και συμπεράνετε την ταυτότητα

$$\frac{1}{\zeta(s)} = \prod_{i=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{p_i^s}\right).$$

γ) Αν οι  $X, Y$  είναι ανεξάρτητες τ.μ. με αυτήν την κατανομή, υπολογίστε την πιθανότητα οι  $X, Y$  να είναι σχετικά πρώτοι.