ΘΕΩΡΙΑ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΩΝ & ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ

Σ.Η.Μ.Μ.Υ. ΧΕΙΜΕΡΙΝΟ ΕΞΑΜΗΝΟ 2011

ΦΥΛΛΑΔΙΟ ΑΣΚΗΣΕΩΝ VII για την Παρασκευή 13/1/2012

Άσκηση 1 Η από κοινού σ.π.π. των X, Y είναι $f(x) = 2e^{-x-y}$ αν $0 \leq x \leq y$ και 0 διαφορετικά. Είναι οι X, Y ανεξάρτητες;

Άσκηση 2 Ο Ορφέας και η Ευριδίκη δίνουν ραντεβού γαι τις 12:30. Οι χρόνοι άφιξης του καθενός είναι ανεξάρτητες τ.μ. με ομοιόμορφη κατανομή στο διάστημα 12:00–13:00. Βρείτε την κατανομή του χρόνου αναμονής αυτού που θα φτάσει πρώτος. Ποια είναι η σ.κ.π του χρόνου που ο Ορφέας περιμένει την Ευρυδίκη;

Άσκηση 3 Οι χρόνοι εξυπηρέτησης ενός πελάτη από δύο εξυπηρετητές Α,Β είναι ανεξάρτητες τ.μ. και ακολουθούν εκθετική κατανομή με παραμέτρους α και β αντίστοιχα. Τη χρονική στιγμή 0 οι Α,Β είναι ελεύθεροι και δέχονται από ένα πελάτη. Υπολογίστε την πιθανότητα να τελειώσει πρώτα η εξυπηρέτηση του πελάτη που εξυπηρετείται από τον Α.

Άσκηση 4 Αν X, Y είναι ανεξάρτητες τ.μ. με κατανομή Poisson και παραμέτρους λ, μ αντίστοιχα. Υπολογίστε την δεσμευμένη σ.μ.π. της X δεδομένου ότι $X + Y = n$, δηλαδή την $\mathbb{P}\big[X = k \,|X + Y = n\big]$ για $k = 0, \ldots, n$.

Άσκηση 5 Θεωρούμε τις τ.μ. X, Y με διασπορά $V(X) = V(Y) = 1$. Η διασπορά του αθροίσματός τους είναι $V(X + Y) = 3$. Μπορεί οι X, Y να είναι ανεξάρτητες; Αν οι X και $X - \alpha Y$ είναι ανεξάρτητες τι μπορούμε να συμπεράνουμε για την σταθερά α;

Άσκηση 6 Έστω U τ.μ. με ομοιόμορφη κατανομή στο [0,1]. Αν $X_i \in \{0, 1, \ldots, 9\}$ είναι το i-στό δεκαδικό ψηφίο της U δείξτε ότι οι X_i είναι ανεξάρτητες τ.μ.

Άσκηση 7 Φορτίο q βρίσκεται στη θέση (X, Y, Z) όπου X, Y, Z είναι ανεξάρτητες τ.μ. με κατανομή $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$. Υπολογίστε την σ.π.π. του δυναμικού V στην αρχή των αξόνων και την $\mathbb{E}[V]$, όπου

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{\sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}}.$$

Άσκηση 8 Αν οι X, Y είναι ανεξάρτητες, ισόνομες τυχαίες μεταβλητές με σ.κ.π. F, βρείτε την σ.κ.π. της $X \wedge Y = \min\{X, Y\}$, την σ.κ.π. της $X \vee Y = \max\{X, Y\}$ και την από κοινού σ.κ.π. των $X \vee Y$ και $X \wedge Y$.

Άσκηση 9 Οι X, Y είναι τ.μ. που παίρνουν τιμές στο [0,1]. Η από κοινού σ.κ.π. τους για $(x, y) \in [0, 1] \times [0, 1]$ δίνεται από την $F(x, y) = \frac{1}{2}x^2y^2 + \frac{1}{2}(x \wedge y)$.
α) Βρείτε τις περιθώριες σ.κ.π. των X, Y και συμπεράνετε ότι καθεμιά τους είναι συνεχής τ.μ.
β) Υπολογίστε την $f(x, y) = \frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x \partial y}$ όπου αυτή υπάρχει και στην συνέχεια το ολοκλήρωμα της f στο $[0, 1] \times [0, 1]$. Γιατί το αποτέλεσμα δεν είναι 1;

Άσκηση 10 Θεωρήστε μια ακολουθία $U_1, U_2, \ldots$ από ανεξάρτητες, ισόνομες τ.μ. με ομοιόμορφη κατανομή στο [0,1]. Αν $E_n = n(1 - \max\limits_{1 \leq i \leq n} U_i)$ υπολογίστε την σ.κ.π. της E_n και δείξτε ότι καθώς $n \to \infty$ αυτή συγκλίνει στην σ.κ.π. μιας εκθετικής τ.μ. με μέση τιμή 1.

Άσκηση 11 Οι X, Y είναι ανεξάρτητες τ.μ. με εκθετική κατανομή $\mathcal{E}xp(\lambda)$. Ορίζουμε $U = X \wedge Y$ και $V = |X - Y|$. Υπολογίστε με ένα διπλό ολοκλήρωμα την πιθανότητα $\mathbb{P}\big[U \leq u,\ V \leq v\big]$ και συμπεράνετε ότι οι U, V είναι ανεξάρτητες τ.μ. με κατανομή $\mathcal{E}xp(2\lambda)$ και $\mathcal{E}xp(\lambda)$ αντίστοιχα. Ερμηνεύστε διαισθητικά αυτό το αποτέλεσμα!

Άσκηση 12 *Σ' ένα ψηφιακό κανάλι η πιθανότητα λανθασμένης λήψης ενός ψηφίου είναι p ανεξάρτητα από τα άλλα ψηφία. Αν S_N είναι το πλήθος των σφαλμάτων κατά την μετάδοση N ψηφίων
α) Υπολογίστε την αναμενόμενη τιμή και την διασπορά του S_N.
β) Βρείτε ένα (όσο καλύτερο μπορείτε) άνω φράγμα για την πιθανότητα να συμβούν πάνω από $2pN$ σφάλματα κατά τη μετάδοση N ψηφίων.
(Υπόδειξη: Ορίζοντας τις τ.μ. X_i με τιμή 1 ή 0 ανάλογα με το αν συμβαίνει λάθος ή όχι στη λήψη του i-στού ψηφίου, έχουμε $S_N = \sum_{i=1}^{N} X_i$.)