ΘΕΩΡΙΑ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΩΝ & ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ

Σ.Η.Μ.Μ.Υ. ΧΕΙΜΕΡΙΝΟ ΕΞΑΜΗΝΟ 2011

ΦΥΛΛΑΔΙΟ ΑΣΚΗΣΕΩΝ VI για την Παρασκευή 23/12/2011

Άσκηση 1 Αν η τ.μ. X ακολουθεί κανονική κατανομή $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ εκφράστε την $F(x) = \mathbb{P}\big[X \leq x \,|X \geq \mu\big]$ συναρτήσει της σ.κ.π. Φ της τυπικής κανονικής κατανομής. Από τους πίνακες για την Φ ή με τη βοήθεια του υπολογιστή βρείτε (συναρτήσει των μ, σ) το μικρότερο δυνατό $x \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε $F(x) \geq 0.99$.

Άσκηση 2 Έχετε ένα μικρό ζαχαροπλαστείο και έχετε καταλήξει στην παρατήρηση ότι το πλήθος των κέικ που πωλούνται κάθε μέρα ακολουθεί κατανομή Poisson με παράμετρο 8. Η παρασκευή κάθε κέικ σας κοστίζει €5 ενώ η τιμή διάθεσής του είναι €12. Αν ένα κέικ δεν πουληθεί την ημέρα παρασκευής του πετιέται. Πόσα κέικ πρέπει να φτιάχνετε κάθε μέρα ώστε να μεγιστοποιήσετε το αναμενόμενο κέρδος από την πώλησή τους; Θα χρειαστείτε πίνακες ή τη βοήθεια του υπολογιστή.

Άσκηση 3 Ένας δέκτης λαμβάνει ένα ημιτονοειδές σήμα. Θεωρητικά το ψηφίο 0 αντιστοιχεί σε πλάτος σήματος α, ενώ το ψηφίο 1 σε πλάτος σήματος $\beta > \alpha$. Στην πράξη το πλάτος είναι μια τ.μ. με σ.π.π. $f_0(x) = C_0(1 - \frac{|x-\alpha|}{A})^+$ για το ψηφίο 0 και $f_1(x) = C_1(1 - \frac{|x-\beta|}{B})^+$ για το ψηφίο 1. Ο δέκτης χρησιμοποιεί ένα κατώφλι πλάτους x και ταξινομεί το σήμα ως 0 αν το πλάτος είναι μικρότερο του x και ως 1 διαφορετικά. Βρείτε την τιμή του x που ελαχιστοποιεί την πιθανότητα λάθος ταξινόμησης 1) αν τα δύο ψηφία είναι εξίσου συχνά, 2) αν γνωρίζουμε εκ των προτέρων ότι με πιθανότητα 90% το ψηφίο είναι 0.

Άσκηση 4 Το μέτρο X της ταχύτητας ενός μορίου αερίου μάζας m σε απόλυτη θερμοκρασία T είναι μια τ.μ. με κατανομή Maxwell-Boltzmann. Συγκεκριμένα η σ.π.π. της δίνεται από την

$$f(x) = \begin{cases} \alpha x^2 e^{-\beta x^2} & \text{για } x > 0 \\ 0 & \text{διαφορετικά,} \end{cases}$$

όπου $\beta = \frac{m}{2KT}$ και α είναι μια σταθερά κανονικοποίησης (K είναι η σταθερά του Boltzmann.)
α) Υπολογίστε τη σταθερά α.
β) Υπολογίστε την αναμενόμενη τιμή της X.
γ) Υπολογίστε την αναμενόμενη τιμή της κινητικής ενέργειας $E = \frac{1}{2}mX^2$.
(Υπόδειξη: $\Gamma(p+1) = p\Gamma(p)$ και $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$.)

Άσκηση 5 Έστω $\mathcal{A}_N = \{0, \frac{1}{N}, \frac{2}{N}, \ldots, \frac{N-1}{N}, 1\}$. Οι X, Y είναι τ.μ. με τιμές στο $\mathcal{A}_N$ και από κοινού συνάρτηση μάζας πιθανότητας

$$p_{x,y} := \mathbb{P}\big[X = x,\ Y = y\big] = C|x - y| \qquad \text{για } (x,y) \in \mathcal{A}_N \times \mathcal{A}_N.$$

α. Ποιες είναι η περιθώριες κατανομές τους;
β. Ποια είναι η $\mathbb{E}\big[X\big]$;

Άσκηση 6 Το (X, Y) είναι ένα τυχαίο διάνυσμα με σ.π.π.

$$f(x,y) = \begin{cases} 6x^\alpha y^{\alpha+1} & \text{για } (x,y) \in [0,1] \times [0,1] \\ 0 & \text{διαφορετικά.} \end{cases}$$

α. Υπολογίστε την σταθερά α.
β. Υπολογίστε την πιθανότητα των ενδεχομένων $\{X \leq 1/3\},\ \{Y > 2X\},\ \{X + Y \geq 1\}$.

Άσκηση 7 Το (X, Y) είναι ένα τυχαίο διάνυσμα με σ.π.π.

$$f(x,y) = \begin{cases} c(x+y) & \text{για } 0 \leq x \leq y \leq 1 \\ 0 & \text{διαφορετικά.} \end{cases}$$

α. Υπολογίστε την σταθερά c.
β. Υπολογίστε την περιθώρια κατανομή των X, Y.

Άσκηση 8 *Έστω $G = (V, E)$ ένας πεπερασμένος γράφος όπου V, E είναι τα σύνολα των κορυφών και των ακμών του αντίστοιχα. Βάφουμε κάθε κορυφή του γράφου κόκκινη (ανεξάρτητα από τις άλλες) με πιθανότητα $1/2$.
α. Δείξτε ότι ο αναμενόμενος αριθμός ακμών που τα άκρα τους έχουν διαφορετικά χρώματα είναι $\frac{1}{2}|E|$.
β. Χρησιμοποιώντας το προηγούμενο ερώτημα δείξτε ότι μπορούμε να διαμερίσουμε το σύνολο V σε δύο υποσύνολα έτσι ώστε τουλάχιστον οι μισές ακμές του γράφου να συνδέεουν κορυφές του ενός με κορυφές του άλλου.
Παρατηρήστε ότι το τελικό συμπέρασμα αφορά στη θεωρία γράφων και ότι δεν υπάρχει τίποτα τυχαίο στον ισχυρισμό του! Αυτό είναι ένα παράδειγμα χρήσης της "πιθανοθεωρητικής μεθόδου" (που επινοήθηκε από τον Paul Erdös) για την απόδειξη της ύπαρξης μιας ιδιότητας ανάμεσα στα μέλη μιας κλάσης. Αν σας ενδιαφέρει δείτε και το λήμμα *probabilistic method* στη Wikipedia.