

ΘΕΩΡΙΑ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΩΝ & ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ

Σ.Η.Μ.Μ.Υ. ΧΕΙΜΕΡΙΝΟ ΕΞΑΜΗΝΟ 2011

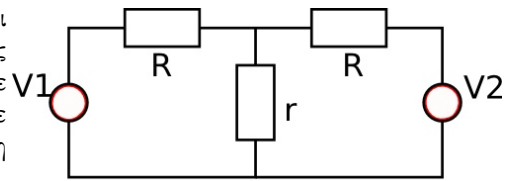
ΦΥΛΛΑΔΙΟ ΑΣΚΗΣΕΩΝ V για την Παρασκευή 16/12/2011

Άσκηση 1 Σε μια παρτίδα πόκερ κάθε παίκτης παίρνει αρχικά 5 φύλλα από τα 52 της τράπουλας. Λέμε ότι ένας παίκτης έχει καρέ αν έχει 4 ίδια φύλλα (ένα από κάθε κατηγορία), π.χ. 4 άσους, 4 δεκάρια κ.ο.κ. Ποιος είναι ο αναμενόμενος αριθμός των παρτίδων που πρέπει να παίξει κάποιος μέχρι να του μοιραστεί ένα καρέ; Ποια είναι προσεγγιστικά η πιθανότητα να μην έχει πάρει κανένα καρέ σε τόσες παρτίδες;

Άσκηση 2 Η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας μιας τ.μ. X είναι $f(x) = Ax^{-4}$ για $x > 2$, και μηδέν διαφορετικά. Υπολογίστε την τιμή της σταθεράς A , και στη συνέχεια τη μέση τιμή και τη διασπορά της X . Για ποιές τιμές του r είναι η ροπή τάξης r πεπερασμένη;

Άσκηση 3 Η συνάρτηση κατανομής μιας τ.μ. X είναι η $F(x) = e^{-e^{-x}}$. Υπολογίστε την $\mathbb{E}[e^{\frac{X}{2}}]$.

Άσκηση 4 Στο κύκλωμα του διπλανού σχήματος οι πηγές $V1$ και $V2$ δίνουν εναλλασσόμενη τάση με την ίδια συχνότητα ω και πλάτος A , ενώ η διαφορά φάσης μεταξύ τους είναι μια τυχαία μεταβλητή Θ με πυκνότητα πιθανότητας $f(\theta) = \frac{1}{\pi} \left| 1 - \frac{\theta}{\pi} \right|$ για $\theta \in [0, 2\pi]$. Υπολογίστε την αναμενόμενη τιμή της ισχύος που καταναλώνεται στην αντίσταση r .



Άσκηση 5 Η διάρκεια ζωής (σε ώρες) ενός προϊόντος είναι τ.μ. με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας

$$f(x) = \frac{1}{1200} e^{-\frac{x}{1200}}, \quad x > 0.$$

Κάθε μονάδα του προϊόντος έχει κόστος κατασκευής €5.000, πωλείται προς €7.000, και συνοδεύεται από εγγύηση για τη διάρκεια ζωής της. Συγκεκριμένα, αν αυτή είναι μικρότερη από 1000 ώρες το αντίτιμο της αγοράς επιστρέφεται στον αγοραστή, ενώ το προϊόν πωλείται προς €500 ως παλιό υλικό.

α) Υπολογίστε το αναμενόμενο κέρδος ανά μονάδα προϊόντος.

β) Ποια διάρκεια ζωής πρέπει να προβλέπει η εγγύηση ώστε το αναμενόμενο κέρδος ανά μονάδα προϊόντος να είναι τουλάχιστον €800;

Άσκηση 6 Έστω X μια συνεχής τ.μ. με σ.κ.π. F . Δείξτε ότι η $H(c) = \mathbb{E}[|X - c|]$ ελαχιστοποιείται αν και μόνο αν $F(c) = 1/2$. Ένα τέτοιο c το ονομάζουμε *διάμεσο τιμή* της X .

Άσκηση 7 α) Αν η X είναι μια τ.μ. με τιμές στο $\{0, 1, 2, \dots\}$ αποδείξτε ότι $\mathbb{E}[X] = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}[X > k]$.

β) Αν η X είναι μια μη αρνητική συνεχής τ.μ. αποδείξτε ότι $\mathbb{E}[X] = \int_0^{\infty} \mathbb{P}[X > t] dt$.

γ) Αν $\lim_{x \rightarrow \infty} x^\alpha \mathbb{P}[X > x] = c > 0$ για κάποιο $\alpha > 0$, βρείτε για ποιές τιμές του r είναι η ροπή τάξης r της X πεπερασμένη.

Άσκηση 8 * Ποιο είναι το αναμενόμενο πλήθος φορών που πρέπει να ρίξουμε ένα ζάρι μέχρι να εμφανιστούν όλες οι όψεις του;