

ΘΕΩΡΙΑ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΩΝ & ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ

Σ.Η.Μ.Μ.Υ. ΧΕΙΜΕΡΙΝΟ ΕΞΑΜΗΝΟ 2011

ΦΥΛΛΑΔΙΟ ΑΣΚΗΣΕΩΝ IV για την Παρασκευή 9/12/2011

Άσκηση 1 Στρίβουμε ένα νόμισμα 4 φορές και συμβολίζουμε με X το μήκος της μεγαλύτερης ακολουθίας από ίδια διαδοχικά αποτελέσματα. Ποια είναι η συνάρτηση κατανομής της X ;

Άσκηση 2 Η πιθανότητα νίκης μας σε μια παρτίδα ενός παιχνιδιού είναι p . Πριν από κάθε παρτίδα έχουμε δικαίωμα να στοιχηματίσουμε ένα ποσό, το οποίο διπλασιάζεται αν κερδίσουμε την παρτίδα και χάνεται αν χάσουμε την παρτίδα. Ξεκινάμε στοιχηματίζοντας 1 στην πρώτη παρτίδα και κάθε φορά που χάνουμε διπλασιάζουμε το στοίχημά μας ώσπου να κερδίσουμε μια παρτίδα. Έχουμε δει ότι με πιθανότητα 1 αυτό θα συμβεί σε πεπερασμένο πλήθος παρτίδων. Ποιο θα είναι το συνολικό μας κέρδος από την αρχή του παιχνιδιού μέχρι και την πρώτη μας νίκη; Αν η τυχαία μεταβλητή K είναι το πλήθος των παρτίδων που παίζουμε μέχρι την πρώτη μας νίκη, ποια κατανομή ακολουθεί η K ; Ας υποθέσουμε τώρα ότι έχουμε αρχική περιουσία $2^n - 1$ οπότε δεν μπορούμε να αντέξουμε περισσότερες από n χαμένες παρτίδες. Ποια είναι η πιθανότητα να χάσουμε όλη μας την περιουσία πριν προλάβουμε να κερδίσουμε κάποια παρτίδα; Έστω K_n το πλήθος των παρτίδων που παίζουμε μέχρι είτε να σημειώσουμε μια νίκη, είτε να τελειώσει η περιουσία μας, δηλαδή $K_n = \min\{K, n\}$. Ποια είναι η κατανομή του κέρδους μας τη στιγμή K_n ;

Άσκηση 3 Αν F είναι η συνάρτηση κατανομής της τ.μ. X , ποιά είναι η συνάρτηση κατανομής των παρακάτω τυχαίων μεταβλητών; α) $Y = aX + b$, β) $Z = X^+ = \max\{0, X\}$, γ) $E = e^X$.

Άσκηση 4 Ποιες από τις παρακάτω συναρτήσεις είναι συναρτήσεις κατανομής; α) $F(x) = e^{-e^{-x}}$, β) $G(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$, γ) $E(x) = \frac{1}{1+e^x}$, δ) $H(x) = (1 - e^{-x})^+$

Άσκηση 5 Μια τ.μ. X έχει συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας

$$f(x) = \begin{cases} 0 & , x < 1 \\ 4x^{-5} & , x \geq 1. \end{cases}$$

Υπολογίστε την πιθανότητα των ενδεχομένων $\{X \in [3, 5]\}$ και $\{X \geq t\}$.

Άσκηση 6 Μια διακριτή τ.μ. X παίρνει τιμές στο $\mathbb{N}$ και έχει συνάρτηση μάζας πιθανότητας $p_n = Cn^{-s}$ για κάποια σταθερά C και κάποιο $s > 1$. Ποια πρέπει να είναι η C σαν συνάρτηση του s ; Ποια είναι η πιθανότητα του ενδεχομένου η X να είναι πολλαπλάσιο του 7;

Άσκηση 7 Έστω X τ.μ. με ομοιόμορφη κατανομή στο $[0, 1]$. Το πρώτο δεκαδικό ψηφίο της X είναι επίσης μια τ.μ. Ποια είναι η κατανομή της; Ποια είναι η κατανομή του δεύτερου δεκαδικού ψηφίου της X ;

Άσκηση 8 Αν η τ.μ. U ακολουθεί την ομοιόμορφη κατανομή στο $[0, 1]$ α) ποια κατανομή ακολουθεί η τ.μ. $X = -\ln(U)$, β) ποια είναι η πυκνότητα πιθανότητας της τ.μ. $Y = U^2$; γ) της $Z = U^{-2}$;

Άσκηση 9 *Αν η τ.μ. X έχει συνεχή συνάρτηση κατανομής F δείξτε ότι η τ.μ. $F(X)$ ακολουθεί την ομοιόμορφη κατανομή στο $[0, 1]$. Υποθέστε αρχικά ότι η F είναι γνησίως αύξουσα, και δείτε τη γενική περίπτωση στη συνέχεια. Πώς θα μπορούσατε εμπνεόμενοι από την άσκηση να προσομοιώσετε στον υπολογιστή σας μια τυπική κανονική τυχαία μεταβλητή με τη βοήθεια μιας γεννήτριας τυχαίων αριθμών στο $[0, 1]$;