

ΘΕΩΡΙΑ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΩΝ & ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ

Σ.Η.Μ.Μ.Υ. ΧΕΙΜΕΡΙΝΟ ΕΞΑΜΗΝΟ 2011

ΦΥΛΛΑΔΙΟ ΑΣΚΗΣΕΩΝ ΙΙΙ για την Παρασκευή 2/12/2011

Άσκηση 1 Η γενετική ταυτότητα ενός ανθρώπου αποτελείται από περίπου 3×10^9 νουκλεοτίδια. Κάθε νουκλεοτίδιο χαρακτηρίζεται από μια από τις βάσεις αδερίνη, γουανίνη, κυτοσίνη ή θυμίνη. Πόσες είναι οι δυνατές γενετικές ταυτότητες; Συγκρίνετε με τον πληθυσμό της γης και με το πλήθος των ανθρώπων που έχουν υπάρξει στη γη όπως τον εκτιμάτε.

Άσκηση 2 Ρίχνουμε ένα ζάρι τρεις φορές. Ποια είναι η πιθανότητα να πάρουμε τρία διαφορετικά αποτελέσματα;

Άσκηση 3 Οι αριθμοί $1, 2, \dots, n$ τοποθετούνται σε τυχαία σειρά. Ποια είναι η πιθανότητα οι δύο πρώτοι στη σειρά να είναι οι 1, 2; Ποια είναι η πιθανότητα το 2 να εμφανιστεί ακριβώς μετά το 1 οπουδήποτε στη σειρά;

Άσκηση 4 Μια αεροπορική εταιρεία έχει παρατηρήσει ότι 5% όσων έχουν αγοράσει εισιτήριο δεν εμφανίζεται για να ταξιδέψει. Τη σημερινή πτήση εκτελεί ένα αεροπλάνο με 200 θέσεις και η εταιρεία έχει πουλήσει 203 εισιτήρια. Ποια είναι η πιθανότητα να μην μπορέσει να εξυπηρετήσει ένα επιβάτη με εισιτήριο; Υποθέστε ότι αν A_i είναι το ενδεχόμενο να εμφανιστεί ο επιβάτης i , τα ενδεχόμενα A_i είναι ανεξάρτητα.

Άσκηση 5 Ένα κουτί περιέχει 90 κανονικές και 10 ελαττωματικές βίδες. Αν διαλέξετε 10 βίδες στην τύχη από το κουτί ποια είναι η πιθανότητα να είναι όλες κανονικές;

Άσκηση 6 Ένας φοιτητής απαντά σε ένα διαγώνισμα με ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής εντελώς στην τύχη. Αν κάθε ερώτηση έχει 5 πιθανές απαντήσεις και το διαγώνισμα έχει 10 ερωτήσεις, υπολογίστε την πιθανότητα να απαντήσει σωστά σε τουλάχιστον 5 ερωτήσεις.

Άσκηση 7 Σε μια 8×8 σκακιέρα, πόσα είναι τα μονοπάτια ελαχίστου μήκους, με βήματα παράλληλα στους άξονες της σκακιέρας, που ξεκινούν από το κάτω αριστερά άκρο της και καταλήγουν στο πάνω δεξιά άκρο της;

Άσκηση 8 Χρησιμοποιώντας τον τύπο του Stirling εκτιμήστε ποια είναι η πιθανότητα αν στρίψουμε ένα νόμισμα 2000 φορές να φέρουμε ακριβώς 1000 φορές γράμματα.

Άσκηση 9 Ένα μοντέλο προτείνει ότι η πιθανότητα ένα ζευγάρι να έχει k ακριβώς παιδιά είναι $p_k = \left(\frac{11}{23}\right)^k$, για $k = 1, 2, \dots$. Ποια πιθανότητα αποδίδει το μοντέλο στο να μην αποκτήσει ένα ζευγάρι παιδιά; Ποια είναι η πιθανότητα κατά το μοντέλο οι θυγατέρες ενός ζευγαριού να είναι ακριβώς 2;

Άσκηση 10 Τοποθετούμε τυχαία r σφαίρες σε n κελιά (για κάθε σφαίρα επιλέγουμε ανεξάρτητα το κελί που θα την τοποθετήσουμε με πιθανότητα $1/n$ για κάθε κελί.) Ποια είναι η πιθανότητα p_k το πρώτο κελί να έχει ακριβώς k σφαίρες; Αν τώρα $r, n \rightarrow \infty$, έτσι ώστε $r/n \rightarrow \lambda \in (0, \infty)$, δείξτε ότι

$$p_k \rightarrow e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$$

Άσκηση 11 Στο παιχνίδι Α ρίχνετε 6 ζάρια και κερδίζετε αν φέρετε τουλάχιστον 1 εξάρι. Στο παιχνίδι Β ρίχνετε 12 ζάρια και κερδίζετε αν φέρετε τουλάχιστον 2 εξάρια. Στο παιχνίδι Γ ρίχνετε 18 ζάρια και κερδίζετε αν φέρετε τουλάχιστον 3 εξάρια. Σε ποιο από τα τρία παιχνίδια έχετε μεγαλύτερη πιθανότητα να κερδίσετε; Σημ: το πρόβλημα είχε τεθεί στον Νεύτωνα από τον Pepys (εκδότη του Principia και παθιασμένο με τα στοιχήματα.)

Άσκηση 12 * Στην άσκηση 8 του 1ου Φυλλαδίου, υπολογίστε την πιθανότητα ο Α να φέρει αυστηρά περισσότερες φορές γράμματα απ' ό,τι ο Β.