

# ΘΕΩΡΙΑ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΩΝ & ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ

Σ.Η.Μ.Μ.Υ. ΧΕΙΜΕΡΙΝΟ ΕΞΑΜΗΝΟ 2011

ΦΥΛΛΑΔΙΟ ΑΣΚΗΣΕΩΝ ΙΙ για την Παρασκευή 25/11/2011

**Άσκηση 1** Έχει παρατηρηθεί ότι μια ποδοσφαιρική ομάδα στο 70% των αγώνων της στο πρωτάθλημα ακολουθεί το σύστημα Α (σφιχτή άμυνα) ενώ στο 30% ακολουθεί το σύστημα Β (πίεση ψηλά). Ένας επιθετικός της ομάδας έχει σκοράρει στο 20% των αγώνων που η ομάδα του αγωνίστηκε με το σύστημα Α και στο 50% των αγώνων που η ομάδα αγωνίστηκε με το σύστημα Β. Ο επόμενος αντίπαλος της ομάδας δεν είναι γνωστός. Ποια πιθανότητα θα αποδίδατε στο ενδεχόμενο να σκοράρει στον επόμενο αγώνα ο εν λόγω επιθετικός;

**Άσκηση 2** Έχετε τρία φαινομενικά ίδια νομίσματα. Τα δύο από αυτά είναι τίμια ενώ το άλλο είναι κίβδηλο και σε κάθε στρίψιμο έχει πιθανότητα  $\frac{2}{3}$  να φέρει γράμματα. Επιλέγετε ένα από τα νομίσματα, το στρίβετε 3 φορές και φέρνετε γράμματα, κορώνα και γράμματα. Ποια είναι η πιθανότητα να έχετε επιλέξει το κίβδηλο;

**Άσκηση 3** Μια εργαστηριακή εξέταση έχει σχεδιαστεί για να ανιχνεύει την ύπαρξη ενός ιού στο αίμα. Έχει βρεθεί ότι αν κάποιος είναι φορέας του ιού η εξέταση βγαίνει θετική για τον ιό με πιθανότητα 95%. Αντίθετα, αν κάποιος δεν είναι φορέας του ιού η εξέταση βγαίνει θετική με πιθανότητα 2% (λέμε τότε ότι το αποτέλεσμα είναι ψευδώς θετικό.)

α) Αν η συχνότητα εμφάνισης του ιού στον πληθυσμό μιας πόλης είναι 1%, βρείτε την πιθανότητα κάποιος με θετικό αποτέλεσμα εξέτασης να είναι φορέας του ιού.

β) Βρείτε την ίδια πιθανότητα αν επιλέξουμε το άτομο από το νοσοκομείο της πόλης, όπου 30% από τους νοσηλευόμενους είναι φορείς του ιού.

**Άσκηση 4** Η έκφραση ενός κληρονομικού νοσήματος καθορίζεται γενετικά ως εξής. Κάθε άνθρωπος έχει ένα ζεύγος αλληλόμορφων γονιδίων, καθένα από τα οποία μπορεί να είναι είτε Α είτε α. Έτσι, ο γονότυπος όπως λέμε κάθε ανθρώπου μπορεί να είναι είτε ΑΑ, είτε Αα, είτε αα. Το νόσημα εκφράζεται μόνο αν κάποιος έχει το γονότυπο αα. Κάθε παιδί κληρονομεί από ένα αλληλόμορφο γονίδιο από κάθε γονιό. Τα γονίδια κληρονομούνται ανεξάρτητα από τους δύο γονείς και κάθε γονίδιο του γονέα έχει την ίδια πιθανότητα να κληροδοτηθεί.

α) Βρείτε την πιθανότητα κάθε γονότυπου για ένα παιδί με γονείς που έχουν και οι δύο γονότυπο Αα.

β) Βρείτε την πιθανότητα κάθε γονότυπου για ένα παιδί με γονείς που έχουν ο ένας γονότυπο ΑΑ και ο άλλος γονότυπο Αα.

γ) Αν τα παιδιά των ερωτημάτων (α) και (β) (για τα οποία γνωρίζουμε μόνο τον γονότυπο των γονιών τους) αποκτήσουν μεταξύ τους ένα παιδί ποια είναι η πιθανότητα κάθε γονότυπου σε αυτό;

δ) Αν κάθε γονιός έχει γονότυπο ΑΑ, Αα ή αα με πιθανότητα 0,81, 0,18 και 0,01 αντίστοιχα, υπολογίστε την πιθανότητα το δεύτερο παιδί τους να εκφράσει το νόσημα δεδομένου ότι το πρώτο παιδί τους έχει εκφράσει το νόσημα.

**Άσκηση 5** Ρίχνουμε ένα ζάρι μέχρι να φέρουμε 1, 2 ή 6. α) Ποια είναι η πιθανότητα το παιχνίδι να τελειώσει σε  $k$  ζαριές; β) Ποια είναι η πιθανότητα στις πρώτες 6 ζαριές να φέρουμε 3 διαδοχικές φορές 6; γ) Ποια είναι η πιθανότητα να φέρουμε για πρώτη φορά 6 στην  $k$  ζαριά; δ) Ποια είναι η πιθανότητα να φέρουμε 6 πριν φέρουμε 1 ή 2; ε) Ποια είναι η πιθανότητα να φέρουμε τουλάχιστον 3 φορές 6 πριν φέρουμε 1 ή 2;

**Άσκηση 6** Δυο παίκτες παίζουν ένα παιχνίδι. Σε κάθε παρτίδα κάθε παίκτης στοιχηματίζει 1 και ο νικητής της παρτίδας παίρνει το στοίχημα για την παρτίδα. Σε κάθε παρτίδα η πιθανότητα νίκης του Α είναι  $p < \frac{1}{2}$ . Ο παίκτης Α ξεκινά με αρχικό ποσό  $x$  και ο παίκτης Β με αρχικό ποσό  $y$ . Το παιχνίδι τελειώνει όταν ένας παίκτης συγκεντρώσει όλα τα χρήματα. Υπολογίστε την πιθανότητα νίκης κάθε παίκτη.

**Άσκηση 7** Στην ταινία “Τρέξε Λόλα τρέξε” η Λόλα έχει 1.000 μάρκα και χρειάζεται να συγκεντρώσει 1.296.000 μάρκα για να σώσει τον φίλο της Ντόνι από τα χέρια της μαφίας. Η Λόλα μπαίνει σ’ ένα καζίνο και προσπαθεί να συγκεντρώσει το ποσό στη ρουλέτα. Μπορεί είτε να ποντάρει σε αριθμό με πιθανότητα επιτυχίας  $\frac{1}{38}$  οπότε και παίρνει 36 φορές το ποντάρισμά της αν νικήσει, είτε σε χρώμα με πιθανότητα επιτυχίας  $\frac{18}{38}$  οπότε και παίρνει 2 φορές το ποντάρισμά της αν νικήσει. Η Λόλα θέλει να επιλέξει ανάμεσα σε δύο στρατηγικές. Είτε να ποντάρει συνέχεια 1 μάρκο σε χρώμα μέχρι να συγκεντρώσει το ποσό που χρειάζεται ή να χάσει, είτε να ποντάρει όλο το ποσό της σε έναν αριθμό και αν κερδίσει να ποντάρει πάλι τα πάντα στον ίδιο αριθμό. Ποια στρατηγική έχει μεγαλύτερη πιθανότητα επιτυχίας;

**Άσκηση 8 \*** (IMC 2011). Θεωρήστε  $A_1, \dots, A_n$  μη κενά και πεπερασμένα σύνολα. Για κάθε  $p \in [0, 1]$  ορίζουμε την συνάρτηση

$$f(p) = \sum_{k=1}^n \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n} (-1)^{k-1} p^{|A_{i_1} \cup A_{i_2} \cup \dots \cup A_{i_k}|},$$

όπου με  $|A|$  συμβολίζουμε τον πληθάρημο του συνόλου  $A$ . Δείξτε ότι η  $f$  είναι αύξουσα. (Υπόδειξη: Βάψτε κάθε σημείο κόκκινο με πιθανότητα  $p$  -ανεξάρτητα από το πώς βάψετε τα άλλα σημεία- και υπολογίστε την πιθανότητα τουλάχιστον ένα από τα  $A_i$  να είναι εξ' ολοκλήρου κόκκινο).