

ΣΤΟΧΑΣΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ & ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ
ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΣΕΜΦΕ 2012
ΦΥΛΛΑΔΙΟ ΑΣΚΗΣΕΩΝ ΙΙΙ

Άσκηση 1 Ορίζουμε $X_t = e^{-t}W(e^{2t})$, όπου η W είναι μια τυπική κίνηση Brown.

α) Δείξτε ότι η X είναι μια ανέλιξη Gauss με $\mathbb{E}[X_t] = 0$ και $\mathbb{E}[X_t X_s] = e^{-|t-s|}$.

β) Δείξτε ότι η $Y_t = X_t - X_0 + \int_0^t X_s ds$ είναι martingale ως προς την φυσική διήθηση της X .

γ) Δείξτε ότι η $Y_t^2 - t$ είναι επίσης martingale ως προς την φυσική διήθηση της X .

δ) Δείξτε ότι η X_t είναι λύση της σ.δ.ε.

$$dX_t = -X_t dt + dB_t$$

για κάποια κατάλληλα ορισμένη κίνηση Brown B .

Άσκηση 2 Χρησιμοποιώντας την αλλαγή μεταβλητής $X = f(Y)$ για $f(x) = \ln(x + e)$ λύστε την σ.δ.ε.

$$dX_t = -\frac{1}{2}e^{-2X} dt + e^{-X} dB_t$$

με αρχική συνθήκη $X_0 = 0$. Δείξτε στη συνέχεια ότι η λύση απειρίζεται με πιθανότητα 1 μετά από κάποιο τυχαίο χρόνο T . Ποια είναι η κατανομή του T ;

Άσκηση 3 Λύστε την σ.δ.ε. $dX_t = -X_t dt + e^{-t} dB_t$, με $X_0 = x_0$.

Άσκηση 4 Θεωρήστε την σ.δ.ε. $dX_t = \frac{1}{2}\sigma'(X_t)\sigma(X_t) dt + \sigma(X_t) dW_t$ με $X_0 = 0$, όπου η $\sigma(\cdot)$ είναι μια ομαλή θετική συνάρτηση. Ορίζουμε την αύξουσα, μη αρνητική συνάρτηση $u(\cdot)$ από τη σχέση

$$\int_0^{u(t)} \frac{dx}{\sigma(x)} = t, \quad \forall t \geq 0.$$

Χρησιμοποιώντας την αλλαγή μεταβλητής $X = u(Y)$ λύστε την σ.δ.ε.

Άσκηση 5 Έστω X μια d -διάστατη κίνηση Brown με $d > 2$ που ξεκινά από το $x_0 \in \mathbb{R}^d$. Αν $r < \|x_0\| < R$ υπολογίστε την πιθανότητα η X να φτάσει στη σφαίρα με κέντρο το 0 και ακτίνα R πριν φτάσει στη σφαίρα με κέντρο το 0 και ακτίνα r . (Υπόδειξη: Αν T είναι ο χρόνος πρώτης άφιξης σε μια από τις δύο σφαίρες δείξτε ότι η $Y_t = \|X_{t \wedge T}\|^{2-d}$ είναι martingale.)

Άσκηση 6 Τιμολογήστε βάσει του υποδείγματος Black & Scholes τα παράγωγα μιας μετοχής που έχουν απόδοση στην ωρίμανση

α) $V_T = S_T^n$, β) $V_T = \left((S_T - K)^+\right)^2$.

Άσκηση 7 Στην προηγούμενη άσκηση τιμολογήσατε ένα παράγωγο, με απόδοση στην ωρίμανση $f(S_T) = S_T^n$ κάνοντας χρήση του τύπου των Black και Scholes. Τιμολογήστε τώρα το παράγωγο αυτό λύνοντας τη διαφορική εξίσωση των Black και Scholes ως εξής: Προσπαθήστε να βρείτε λύση της μορφής $V(t, x) = h(t)x^n$. Ποια διαφορική εξίσωση πρέπει να ικανοποιεί η συνάρτηση $h(t)$; Με ποια τελική συνθήκη; Λύστε τώρα αυτή την εξίσωση.

Άσκηση 8 Τιμολογήστε βάσει του υποδείγματος Black και Scholes ένα παράγωγο που αποδίδει στην ωρίμανσή του T ένα σταθερό ποσό A αν η αξία του πρωτογενούς προϊόντος δεν πέσει τότε πριν την ωρίμανση κάτω από την τιμή M .

Άσκηση 9 Δείξτε ότι αν η συνάρτηση $u(t, x)$ ικανοποιεί την διαφορική εξίσωση των Black και Scholes για $t < T$, $x > 0$ τότε το ίδιο συμβαίνει και για τη συνάρτηση:

$$v_\alpha(t, x) = \left(\frac{x}{\alpha}\right)^{1-\kappa} u\left(t, \frac{\alpha^2}{x}\right),$$

για οποιοδήποτε $\alpha > 0$, με κατάλληλη επιλογή του κ . Χρησιμοποιήστε αυτό το αποτέλεσμα και την μέθοδο των ειδώλων για να τιμολογήσετε ένα ευρωπαϊκό δικαίωμα πώλησης με ωρίμανση T τιμή άσκησης K και άνω και εκτός φράγμα $M > K$. Μπορείτε να τιμολογήσετε ένα ανάλογο δικαίωμα με άνω και εντός φράγμα;

Άσκηση 10 Θέλετε να δανειστείτε ένα ποσό A τη στιγμή t για την περίοδο (t, T) . Το επιτόκιο που θα πληρώνετε αν δανειζόσασταν τη στιγμή t θα ήταν το επιτόκιο περιόδου που θα ισχύει τότε. Για να αποφύγετε τον κίνδυνο αύξησης του επιτοκίου συνάπτετε μια συμφωνία να πληρώσετε καταβάλετε τους τόκους βάσει ενός σταθερού επιτοκίου R . Αν είναι γνωστές οι σημερινές αξίες των ομολόγων όψεως 1 και ωρίμανσης t και T βρείτε για ποια τιμή του R η συμφωνία αυτή έχει μηδενική αξία σήμερα.