ΣΤΟΧΑΣΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ & ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΣΕΜΦΕ 2012

ΦΥΛΛΑΔΙΟ ΑΣΚΗΣΕΩΝ ΙΙ

Άσκηση 1 Έστω $0 \leq s < r < t$. Αν η $(B_t)_{t\geq 0}$ είναι κίνηση Brown, υπολογίστε την δεσμευμένη κατανομή της B_r δεδομένων των $B_s,\ B_t$.

Άσκηση 2 Αν η $(B_t)_{t\geq 0}$ είναι κίνηση Brown, δείξτε χρησιμοποιώντας τον ορισμό των martingales ότι οι παρακάτω διαδικασίες

$$B_t^3 - 3tB_t, \qquad B_t^4 - 6tB_t^2 + 6t^2, \qquad e^{t/2}\cos B_t$$

είναι martingales.

Άσκηση 3 Έστω $(B_t)_{t\geq 0}$ μια κίνηση Brown που ξεκινά από το $x \in \mathbb{R}$. Αν $a < x < b$ ορίζουμε $T_a = \inf\{t \geq 0 : B_t = a\}$ τον χρόνο πρώτης άφιξης στο a και αντίστοιχα τον T_b. Χρησιμοποιώντας το θεώρημα επιλεκτικής στάσης για τα παρακάτω martingales M_t υπολογίστε τις αντίστοιχες ποσότητες:
α) Με την βοήθεια του $M_t^{(1)} = B_t$ υπολογίστε την πιθανότητα $\mathbb{P}\big[T_a < T_b\big]$.
β) Με την βοήθεια του $M_t^{(2)} = B_t^2 - t$ υπολογίστε την $\mathbb{E}\big[T_a \wedge T_b\big]$.
γ) Με την βοήθεια του $M_t^{(3)} = B_t^3 - 3tB_t$ υπολογίστε την $\mathbb{E}\big[T_a \mid T_a < T_b\big]$.
δ) Με την βοήθεια του $M_t^{(4)} = B_t^4 - 6tB_t^2 + 6t^2$ υπολογίστε την διασπορά του $T_a \wedge T_b$.

Άσκηση 4 Έστω M_t ένα θετικό martingale με συνεχείς τροχιές με $M_0 = x_0$ και $\lim_{t\to\infty} M_t = 0$, σ.β. Ορίζουμε την τ.μ. $M^* = \sup_{t\geq 0} M_t$. Με τη βοήθεια του θεωρήματος επιλεκτικής στάσης δείξτε ότι για κάθε $x > x_0$ έχουμε $\mathbb{P}\big[M^* \geq x\big] = x_0/x$. (*Υπόδειξη:* Αν τ_x είναι ο χρόνος πρώτης άφιξης στο x τότε $\{M^* \geq x\} = \{\tau_x < +\infty\}$.)

Άσκηση 5 Έστω $(B_t)_{t\geq 0}$ μια κίνηση Brown που ξεκινά από το μηδέν. Αν $\lambda > 0$ δείξτε ότι $B_t - \lambda t \to -\infty$ σ.β. καθώς $t \to \infty$. Αν $M^* = \sup_{t\geq 0}(B_t - t/2)$ δείξτε ότι η M^* ακολουθεί εκθετική κατανομή με μέση τιμή 1 (*Υπόδειξη:* χρησιμοποιήστε την προηγούμενη άσκηση για κατάλληλο εκθετικό martingale). Στη συνέχεια χρησιμοποιώντας τη συμμετρία κλίμακας της κίνησης Brown βρείτε την κατανομή της $\sup_{t\geq 0}(B_t - \lambda t)$ για οποιοδήποτε $\lambda > 0$.

Άσκηση 6 * Θεωρούμε δύο ανεξάρτητες τυπικές κινήσεις Brown B_t, W_t στον $\mathbb{R}$ και ορίζουμε $\tau = \inf\{t \geq 0 : B_t \geq 1\}$. Δείξτε ότι η χαρακτηριστική συνάρτηση της τ.μ. W_τ είναι $\phi(u) = e^{-|u|}$. (Φυσική ερμηνεία: αν ένα σωματίδιο εκτελεί κίνηση Brown στο επίπεδο και τοποθετήσουμε ένα πέτασμα στην ευθεία $x = 1$ τότε η θέση του ίχνους που αφήνει το σωματίδιο καθώς προσπίπτει στο πέτασμα ακολουθεί κατανομή Cauchy.)

Άσκηση 7 Από τον ορισμό του ολοκληρώματος Itô υπολογίστε το $\int_0^t s\ dB_s$.

Άσκηση 8 Χρησιμοποιώντας τον κανόνα του Itô υπολογίστε το $\int_0^t \big(B_s^2 - s\big)\ dB_s$

Άσκηση 9 Χρησιμοποιώντας τον γενικευμένο κανόνα του Itô για τις στοχαστικές διαδικασίες

$$X = B \cdot B = \int_0^{\cdot} B_s\ dB_s \qquad \text{και} \qquad Y = B^2 \cdot \langle B \rangle = \int_0^{\cdot} B_s^2\ ds$$

δείξτε ότι η ανέλιξη

$$M_t = \exp\left(\int_0^t B_s\ dB_s - \frac{1}{2}\int_0^t B_s^2\ ds\right)$$

είναι martingale.

Άσκηση 10 Αν $X_t = \int_0^t \phi(s)\ dB_s$ όπου $\int_0^t \phi^2(s)\ ds < +\infty$ για κάθε $t > 0$, υπολογίστε την μέση τιμή $\mathbb{E}\big[X_t B_s\big]$ για κάθε $s, t \geq 0$. Μπορείτε να υπολογίσετε την από κοινού κατανομή των X_t και B_s;

Άσκηση 11 Αν η $X_t = (W_t^{(1)}, \ldots, W_t^{(d)})$ είναι μια d-διάστατη κίνηση Brown και $Y_t = \|X_t\|$ (όπου $\|x\| = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_d^2}$ είναι η ευκλείδια νόρμα του $x \in \mathbb{R}^d$) δείξτε ότι:
α) η διαδικασία $\beta = \sum_{i=1}^d \frac{W^{(i)}}{Y} \cdot W^{(i)}$ είναι μια τυπική κίνηση Brown (*υπόδειξη:* θεώρημα Lévy) και
β) η Y ικανοποιεί την στοχαστική διαφορική εξίσωση $dY_t = d\beta_t + \frac{d-1}{2Y_t}dt$.

Άσκηση 12 Θεωρήστε τη στοχαστική διαδικασία $(X_t)_{0\leq t<1}$, με $X_t = (1-t)\int_0^t \frac{dB_s}{1-s}$. Δείξτε ότι
α) $X_t \to 0$ σ.β. καθώς $t \to 1$.
β) Η X ικανοποιεί την στοχαστική διαφορική εξίσωση $dX_t = dB_t - \frac{X_t}{1-t}dt$ για $t < 1$.