ΣΤΟΧΑΣΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ & ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΣΕΜΦΕ 2012

ΦΥΛΛΑΔΙΟ ΑΣΚΗΣΕΩΝ Ι

Άσκηση 1 Έστω $\{M_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ένα martingale διακριτού χρόνου, τ.ώ. $\mathbb{E}\big[M_n^2\big] < +\infty,\ \forall n \in \mathbb{N}$. Ορίζουμε την διαδικασία $\langle M\rangle$ ως $\langle M\rangle_0 = 0$ και $\langle M\rangle_n = \sum_{k=1}^n A_k,\ \forall n \in \mathbb{N}$, όπου $A_n = \mathbb{E}\big[(M_n - M_{n-1})^2 \bigm| \mathcal{F}_{n-1}\big]$, για $n \in \mathbb{N}$.
α) Δείξτε ότι η $\langle M\rangle$ είναι αύξουσα και προσαρμοσμένη στην $\mathcal{F}_{n-1}$.
β) Δείξτε ότι η στοχαστική διαδικασία $M_n^2 - \langle M\rangle_n$ είναι martingale.
γ) Δείξτε ότι η $\langle M\rangle$ είναι η μοναδική διαδικασία με αρχική τιμή 0 και με τις ιδιότητες (α) και (β).

Άσκηση 2 Έστω $\{M_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ένα martingale διακριτού χρόνου, τ.ώ. $\mathbb{E}\big[M_n^2\big] < +\infty,\ \forall n \in \mathbb{N}$. Δείξτε ότι

$$\mathbb{E}\big[M_n^2\big] = \mathbb{E}\big[M_0^2\big] + \sum_{k=1}^n \mathbb{E}\big[(M_n - M_{n-1})^2\big],$$

και συμπεράνετε ότι αν $\sup_n \mathbb{E}\big[M_n^2\big] = C < +\infty$ τότε υπάρχει μια τυχαία μεταβλητή M τ.ώ.

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\big[|M_n - M|^2\big] = 0.$$

Υπόδειξη: δείξτε ότι η M_n είναι ακολουθία Cauchy στον $L^2(\mathbb{P})$.

Άσκηση 3 Με τη βοήθεια της ανισότητας του Doob, δείξτε ότι υπό τις προϋποθέσεις της προηγούμενης άσκησης έχουμε επιπλέον $M_n \to M,\ \mathbb{P}$-σ.β.

Άσκηση 4 Ας είναι M, X στοχαστικές διαδικασίες διακριτού χρόνου προσαρμοσμένες στη διήθηση $\big\{\mathcal{F}_n\big\}$. Ορίζουμε τον *μετασχηματισμό martingale* της M από την X $\big($και συμβολίζουμε με $X\cdot M\big)$ ως εξής: $(X\cdot M)_0 = 0$ και

$$(X\cdot M)_n = \sum_{k=1}^n X_{k-1}\big(M_k - M_{k-1}\big), \qquad n \in \mathbb{N}$$

Δείξτε ότι αν η M είναι martingale τότε και η $X\cdot M$ είναι martingale και με το συμβολισμό της άσκησης 1

$$\langle X\cdot M\rangle = X^2 \cdot \langle M\rangle$$

Άσκηση 5 Θεωρήστε ένα martingale M τ.ώ. $\mathbb{E}\big[M_n^2\big] < +\infty,\ \forall n \in \mathbb{N}$ και επιλέξτε $X_n = (1 + \langle M\rangle_{n+1})^{-1/2-\epsilon}$. Χρησιμοποιώντας την στοιχειώδη ανισότητα

$$\frac{x-y}{x^{1+2\epsilon}} \le \frac{1}{2\epsilon}\left(\frac{1}{y^{2\epsilon}} - \frac{1}{x^{2\epsilon}}\right), \qquad 0 < y \le x$$

και τα αποτελέσματα των προηγούμενων ασκήσεων δείξτε ότι

$$\mathbb{E}\big[(X\cdot M)_n^2\big] \le \frac{1}{2\epsilon},$$

και συμπεράνετε με τη βοήθεια και του λήμματος του Kronecker ότι αν $\langle M\rangle_n \to \infty$ σ.β. τότε $\frac{M_n}{\langle M\rangle_n^{1/2+\epsilon}} \to 0$ σ.β. Αν οι $Z_1, Z_2, \ldots$ είναι ανεξάρτητες ισόνομες τ.μ. με μέση τιμή μ και διασπορά $\sigma^2 < +\infty$ δείξτε ότι η

$$M_n = \sum_{k=1}^n Z_k - \mu n$$

ικανοποιεί τις προϋποθέσεις της άσκησης. Πώς μεταφράζεται το συμπέρασμα της άσκησης;

Άσκηση 6 Δείξτε ότι αν τ είναι ένας χρόνος διακοπής τότε ο τ είναι $\mathcal{F}_\tau$-μετρήσιμη απεικόνιση.

Άσκηση 7 Ας είναι σ, τ δύο χρόνοι διακοπής. Δείξτε ότι $\mathcal{F}_{\tau\wedge\sigma} = \mathcal{F}_\sigma \cap \mathcal{F}_\tau$. Δείξτε επίσης ότι τα ενδεχόμενα $\{\sigma < \tau\}, \{\sigma = \tau\}, \{\sigma \le \tau\}$ ανήκουν στην $\mathcal{F}_{\tau\wedge\sigma}$.

Άσκηση 8 Αν $\{M_t\}_{t\ge 0}$ είναι ένα $(\mathcal{F}_t)$-martingale και τ είναι ένας χρόνος διακοπής, δείξτε ότι η διαδικασία $X_t = M_{\tau\wedge t}$ (η M σταματημένη στον χρόνο τ) είναι επίσης ένα $(\mathcal{F}_t)$-martingale.

Άσκηση 9 Έστω X ένας συμμετρικός τυχαίος περίπατος στου ακεραίους με $X_0 = 0$. Αν $\lambda > 0$ βρείτε το $\theta = \theta(\lambda)$ ώστε η διαδικασία

$$M_n = \exp(\theta X_n - \lambda n)$$

να είναι martingale. Ορίζουμε τώρα $T = \inf\{n \in \mathbb{N} : |X_n| = N\}$. Δείξτε ότι ο T είναι χρόνος διακοπής, χρησιμοποιήστε το θεώρημα επιλεκτικής στάσης για να υπολογίσετε τον μετασχηματισμό Laplace του T :

$$\phi(\lambda) = \mathbb{E}\big[e^{-\lambda T}\big].$$

Με τη βοήθεια της $\phi(\lambda)$ υπολογίστε τώρα την μέση τιμή και τη διασπορά του T.

Άσκηση 10 Θεωρήστε πάλι ένα τυχαίο περίπατο στους ακεραίους με $X_0 = 0$, αυτή τη φορά όμως η πιθανότητα να κινηθούμε δεξιά είναι $p < 1/2$ σε κάθε βήμα. Βρείτε μια σταθερά $\theta \neq 1$ ώστε η θ^{X_n} να είναι martingale. Στη συνέχεια, αν $a < 0 < b$ υπολογίστε την πιθανότητα $\mathbb{P}\big[\tau_a < \tau_b\big]$, όπου $\tau_a = \inf\{n : X_n = a\}$, $\tau_b = \inf\{n : X_n = b\}$ Ποιο είναι το όριο αυτής της πιθανότητας καθώς $a \to -\infty$;

Άσκηση 11 Ρίχνουμε ένα ζάρι ώσπου το άθροισμα των ζαριών που θα έχουμε φέρει να ξεπεράσει το 2012. Δείξτε ότι ο αναμενόμενος αριθμός των ζαριών που θα ρίξουμε είναι μεγαλύτερος από 4026/7. Υπόδειξη: Αν S_n είναι το άθροισμα των n πρώτων ζαριών τότε η $S_n - 3,5n$ είναι martingale.

Άσκηση 12 Παίζουμε ένα ευνοϊκό παιγνίδι στο οποίο σε κάθε γύρο με πιθανότητα $p > 1/2$ διπλασιάζουμε το στοίχημά μας, και με πιθανότητα $1 - p > 0$ χάνουμε το ποσόν που στοιχηματήσαμε. Ξεκινάμε με αρχική περιουσία S_0 και αμέσως πριν τον n-οστό γύρο μπορούμε να στοιχηματήσουμε οποιοδήποτε ποσόν C_n μεταξύ του 0 και της περιουσίας μας μέχρι εκείνη τη στιγμή S_{n-1}. Επομένως, αμέσως μετά το n-οστό γύρο η περιουσία μας θα είναι

$$S_n = S_{n-1} + C_n\xi_n$$

όπου οι $\{\xi_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ είναι ανεξάρτητες ισόνομες τυχαίες μεταβλητές που παίρνουν την τιμή $+1$ με πιθανότητα p και την τιμή -1 με πιθανότητα $1 - p$. Η C_n θα πρέπει να ικανοποιεί την ανισότητα $0 \leq C_n \leq S_{n-1}$, και μπορεί να εξαρτάται από τα αποτελέσματα των προηγούμενων γύρων, αλλά θα πρέπει οπωσδήποτε να είναι μετρήσιμη ως προς τη σ-άλγεβρα που παράγουν οι $\xi_1, \ldots, \xi_{n-1}$. Ο σκοπός μας είναι να βρούμε μια στρατηγική που μεγιστοποιεί τον *αναμενόμενο ρυθμό μεγέθυνσης*

$$r_N = \frac{1}{N}\mathbb{E}\big[\log(S_N/S_0)\big].$$

α) Δείξτε ότι ανεξαρτήτως της στρατηγικής βάσει της οποίας επιλέγουμε τα στοιχήματά μας C_n η στοχαστική διαδικασία

$$M_n = \log(S_n) - nH(p), \qquad \text{όπου } H(p) = p\log p + (1-p)\log(1-p) + \log 2$$

είναι supermartingale και συμπεράνετε ότι $r_N \leq H(p)$.
β) Βρείτε μια στρατηγική (ένα τρόπο να επιλέγετε τα στοιχήματά σας C_n) τέτοια ώστε η M_n να είναι martingale και δείξτε ότι με αυτή τη στρατηγική έχουμε

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N}\log\left(\frac{S_N}{S_0}\right) = H(p), \ \mathbb{P}\text{-σ.β.}$$

Άσκηση 13 Σε μια αγορά υπάρχει μια μετοχή και ένας καταθετικός λογαριασμός με σταθερό επιτόκιο r χωρίς κίνδυνο. Μπορούμε να συναλλασόμαστε στις χρονικές στιγμές $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_{N-1} < t_N = T$. Η τιμή της μετοχής είναι μια στοχαστική ανέλιξη στον χώρο πιθανότητας $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, ενώ υπάρχει μια διήθηση $\{\mathcal{F}_n\}_{n=0,1,\ldots,N}$ τ.ώ. για κάθε $n \leq N$ η S_{t_n} είναι $\mathcal{F}_n$-μετρήσιμη, και $\mathcal{F}_N = \mathcal{F}$.

Θα ονομάζουμε μια στρατηγική (ϕ_n, ψ_n) αυτοχρηματοδοτούμενη αν οι ϕ_n, ψ_n είναι προσαρμοσμένεςστην$\mathcal{F}_n$ και για κάθε $n < N$ έχουμε

$$\phi_n S_{n+1} + \psi_n e^{r(t_{n+1}-t_n)} = \phi_{n+1}S_{n+1} + \psi_{n+1}.$$

Η ερμηνεία είναι η εξής. Το αριστερό μέλος αντιστοιχεί στην αξία τη στιγμή t_{n+1} ενός χαρτοφυλακίου με ϕ_n μετοχές και ψ_n σε καταθέσεις χωρίς κίνδυνο που συνθέσαμε τη στιγμή t_n. Το δεξί μέλος αντιστοιχεί στην αξία την ίδια στιγμή ενός χαρτοφυλακίου με ϕ_{n+1} μετοχές και ψ_{n+1} σε καταθέσεις. Η ισότητα των δύο σημαίνει ότι η αλλαγή θέσης που κάνουμε τη στιγμή t_{n+1} δεν αλλάζει την αξία του χαρτοφυλακίου, απλώς ανακατανέμουμε τις επενδύσεις μας. Ζητάμε οι ϕ_n, ψ_n να είναι προσαρμοσμένες γιατί στην εκάστοτε θέση που λαμβάνουμε δεν μπορούμε να χρησιμοποιούμε πληροφορία από το μέλλον.

α) Δείξτε ότι η αξία τη στιγμή t_n (V_n) ενός χαρτοφυλακίου που κατασκευάζεται με αυτοχρηματοδοτούμενη στρατηγική δίνεται από την σχέση:

$$e^{-rt_n}V_n = V_0 + \sum_{j=1}^{n} \phi_{j-1}\left(e^{-rt_j}S_{t_j} - e^{-rt_{j-1}}S_{t_{j-1}}\right).$$

Επομένως αν ορίσουμε $V_n^* = e^{-rt_n}V_n$ και $S_n^* = e^{-rt_n}S_{t_n}$ έχουμε στο συμβολισμό της άσκησης 4 ότι $V^* = V_0 + \phi \cdot S^*$.
β) Συμπεράνετε ότι αν υπάρχει μέτρο πιθανότητας $\mathbb{Q}$ στον $(\Omega, \mathcal{F})$ τ.ώ. η S^* είναι $\mathbb{Q}$-martingale, τότε για κάθε αυτοχρηματοδοτούμενο χαρτοφυλάκιο η V^* θα είναι επίσης $\mathbb{Q}$-martingale. Ένα τέτοιο μέτρο πιθανότητας θα το ονομάζουμε μέτρο αποτίμησης για την S.
γ) Γενικεύστε την έννοια της αυτοχρηματοδοτούμενης στρατηγικής για μια αγορά όπου υπάρχουν k προϊόντα με κίνδυνο. Θα λέμε ότι μια αυτοχρηματοδοτούμενη στρατηγική είναι στρατηγική arbitrage αν $V_0 = 0$, $\mathbb{P}\big[V_T \geq 0\big] = 1$, και $\mathbb{P}\big[V_T > 0\big] > 0$. Δείξτε ότι αν υπάρχει μέτρο πιθανότητας $\mathbb{Q}$ που είναι μέτρο αποτίμησης για όλα τα προϊόντα με κίνδυνο και $\mathbb{Q} \sim \mathbb{P}$ τότε δεν υπάρχει στρατηγική arbitrage.
δ) Θα λέμε ότι ένα παράγωγο με απόδοση μια $\mathcal{F}$-μετρήσιμη τυχαία μεταβλητή V_T μπορεί να αναπαραχθεί αν υπάρχει αυτοχρηματοδοτούμενη στρατηγική που η αξία της τη στιγμή T ταυτίζεται με την V_T, $\mathbb{P}$-σ.β. Δείξτε ότι αν υπάρχει μέτρο αποτίμησης $\mathbb{Q} \sim \mathbb{P}$ τότε για κάθε παράγωγο που μπορεί να αναπαραχθεί η μοναδική τιμή διαπραγμάτευσης του παραγώγου τη στιγμή t_0 για την οποία δεν υπάρχει στρατηγική arbitrage είναι η

$$V_0 = e^{-rT}\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\big[V_T\big].$$

Συγκεριμένα κατασκευάστε μια τέτοια στρατηγική αν η τιμή διαπραγμάτευσης του παραγώγου τη στιγμή t_0 είναι διάφορη της V_0, ενώ δείξτε ότι αν τη στιγμή t_n η αξία του παραγώγου είναι $V_{t_n} = e^{-r(T-t_n)}\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\big[V_T \,\big|\mathcal{F}_n\big]$, τότε στη διευρυμένη αγορά που αποτελείται από τη μετοχή, το παράγωγο και τον καταθετικό λογαριασμό δεν υπάρχει στρατηγική arbitrage.

Άσκηση 14 Θεωρήστε ένα απλό μοντέλο αγοράς με μια μετοχή και $N = 4$ περιόδους. Η σημερινή τιμή της μετοχής είναι 100 ενώ σε κάθε περίοδο η τιμή της μετοχής μπορεί είτε να ανέβει κατά 20% είτε να πέσει κατά 10% με πιθανότητα 1/2 για καθένα από τα δύο ενδεχόμενα.
α) Θεωρούμε ένα χώρο πιθανότητας Ω που αποτελείται από 16 σημεία που αντιστοιχούν στις 2^4 δυνατές τροχιές της τιμής της μετοχής. Με ποιο μέτρο πιθανότητας $\mathbb{P}$ εφοδιάζουμε τον Ω σύμφωνα με το μοντέλο μας;
β) Ας υποθέσουμε για απλότητα ότι $r = 0$, οπότε $S^* = S$. Είναι η S ένα $\mathbb{P}$-martingale; Μπορείτε να κατασκευάσετε ένα μέτρο πιθανότητας $\mathbb{Q}$ στον Ω ώστε η S να είναι $\mathbb{Q}$-martingale; Υπόδειξη: αποδώστε διαφορετική πιθανότητα από 1/2 στο ενδεχόμενο να ανέβει ή να πέσει η τιμή της μετοχής κάθε φορά.
γ) Σύμφωνα με την προηγούμενη άσκηση βρείτε την σημερινή αξία ενός παραγώγου που η απόδοσή του στο τέλος της 4ης περιόδου είναι $(S_4 - 120)^+$, ώστε να μην υπάρχει στρατηγική arbitrage. Μπορείτε να βρείτε μια αυτοχρηματοδοτούμενη στρατηγική που αναπαράγει την απόδοση του παραγώγου;
δ) Επαναλάβετε το προηγούμενο ερώτημα για το παράγωγο με απόδοση $V_4 = \max_{0 \leq i \leq 4} S_i - S_4$.